

طريقة مقترحة لتقدير المعدل الزمني لحدوث الأمطار في مدينة الموصل  
كعملية بواسونية غير متجانسة

مثنى صبحي السليمان  
مدرس

باسل يونس ذنون  
أستاذ

كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل

### الملخص

يتناول هذا البحث دراسة العملية البواسونية غير المتجانسة بأسلوب مقترح جديد وذلك من خلال دمج طريقتين للتقدير في طريقة واحدة للوصول إلى مقدر للمعدل الزمني للحدوث دون اللجوء إلى توزيعات احتمالية شائعة وتقدير معالمها. إذ تم توظيف طريقة لامعلمية، هي طريقة التقدير اللبي، ضمن طريقة مقترحة للتقدير.

ويتضمن التطبيق العملي دراسة الفترات بين حدوث الأمطار في محطة الموصل للأنواء الجوية في محافظة نينوى، ويتم تقدير المعدل اليومي لحدوث الأمطار بالطريقة الإحصائية المقترحة في البحث، ومقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع نتائج أخرى تم الحصول عليها سابقاً باستخدام مقدرين آخرين. ويتضح من خلال هذه المقارنة كفاءة الطريقة المقترحة في تقدير المعدل الزمني لحدوث الحوادث في العملية البواسونية غير المتجانسة. كلمات دالة: العملية البواسونية غير المتجانسة، التقدير اللبي، تقدير القطع الحكيم الخطية، الأمطار.

### *A Suggested Method for Estimating the Rate of rainfall in Mosul as a Non-Homogeneous Poisson Process*

*Muthanna S. Al-Suleiman*

*Basil Y. Thanoon*

### *Abstract*

This research deals with the non-homogeneous Poisson process in a suggested method through mixing two methods of estimation in one method to arrive at the estimate of the rate of occurrence without using common probability distribution and estimating their parameters. A non-parametric method has been applied in a suggested method of estimation.

The practical application includes studying the period of daily rainfall in Mosul Forecasting Station in Neneva. The rate of daily rainfall has been estimated in the static method suggested in the research. The result arrived at in this research has been compared with another results shown by another two estimators. The efficiency of this suggested method becomes clear in estimating the rate of occurrence of events in non-homogenous Poisson process through this comparison.

**Keywords:** Non-Homogenous Poisson Process, Kernel Estimation, Piecewise Linear Estimation, Rainfall

## 1. المقدمة Introduction :

تُعد الطرائق اللامعلمية (Non-Parametric Methods) في التقدير الإحصائي من الطرائق التي تلاقي اهتماماً واسعاً، خاصاً في الوقت الحاضر. إذ إنّ الطرائق اللامعلمية يمكن أن تستعمل ضمن التحليل الاستطلاعي (Explorator Analysis) لتحقيق تركيب البيانات وللمساعدة في اختيار نوع النموذج المعلمي الجيد الملائم للبيانات. إنّ هذه الطرائق لا تفترض أي شروط مسبقة، لذا فهي لا تكون مقيدة بافتراضات قد لا تتلاءم كلياً مع طبيعة المسألة قيد الدراسة.

وفي هذا البحث تم توظيف طريقة لامعلمية ضمن طريقة مقترحة لتقدير المعدل الزمني للحدوث في العملية البواسونية غير المتجانسة في فترة زمنية محددة، إذ إنّ هذه الطريقة لا تفترض نموذجاً معيناً لتحديد معالم أو دوال موزونة. كما يمكن أن تستخدم هذه الطريقة لتوليد أزمنة حدوث الحوادث وذلك عندما تستخدم العملية البواسونية غير المتجانسة كمدخلات في محاكاة المونت كارلو (Monte Carlo Simulation).

إنّ الطرائق المعلمية تكون ملائمة للبيانات بصورة عامة وذلك عندما يتم استخدام طريقة الإمكان الأعظم المعلمية لتقدير معالمها، في حين أن الطرائق اللامعلمية تُعد أكثر مرونة في التقدير مثل طريقة التقدير اللبّي (Kernel Estimation Method) أو طريقة الشرائح (Spline Method). ففي عام 1976 قدّم الباحثان [Lewis and Shedler, 1976] بحثاً بيّنا تقنيات لامعلمية لتقدير المعدل الزمني للحدوث لصياغة الصفقات في نظام قاعدة البيانات، وأحد هذه المقدرات اللامعلمية المستخدمة هو التقدير اللبّي. وقد قدّم الباحث [ذنون، 1998] بحثاً أستعرض فيه التقدير اللبّي كأسلوب بياني حديث في التقدير الإحصائي لتقدير دالة كثافة الاحتمال والمعدل الشرطي والتباين الشرطي في حالة البعدين والثلاثة أبعاد وكذلك في حالة البيانات الإحصائية والبيانات المأخوذة من سلاسل زمنية. وفي بحث [Choi and Hall, 1998] تم استخدام التقدير اللبّي لتحليل العملية البواسونية غير المتجانسة المتمثلة بظاهرة الزلازل في اليابان. وأستخدم الباحثان [Helmerts and Mangku, 2000] المقدّر اللبّي كطريقة لامعلمية في التقدير. وفي بحث [Zhuang et al., 2002] تم استخدام المقدّر اللبّي لتقدير خلفية المعدل الزمني لحدوث الزلازل في نموذج امتداد المكان-الزمن الطبيعي لهاكس الأحادي البعد (Natural Space-Time Extension of the One-Dimensional Hakes Model)، وطريقة الإمكان الأعظم لتقدير تأثير تسبب الصدمات. كما استخدم هذا الأجراء الباحث [Peng, 2003] في بحثه للدكتوراه على تطبيقات العملية النقطية متعددة الأبعاد في تقييم

خطر الحرائق الهائلة في محافظة لوس انجلوس في كاليفورنيا، فضلاً عن تطوير طرائق  
لامعملية لتقدير توزيع جديد لعملية تغطية المكان والزمان.

وفي بحثه للدكتوراه، قدم الباحث [ السليمان، 2006 ] دراسة عن تقدير المعدل الزمني  
حدوث الحوادث في العملية البواسونية غير المتجانسة تضمنت طرائق معلمية فضلاً عن  
طريقة مقترحة لامعملية. وتم تخصيص الجانب التطبيقي لتلك الدراسة على عملية نقطية  
(Point Process) مهمة جداً وهي الأمطار في محطة من المحطات الرئيسة للأنواء الجوية  
في محافظة نينوى في العراق. وتتناول هذه المقالة الطريقة اللامعملية المقترحة بجانبها  
النظري والتطبيقي.

## 2. العملية البواسونية غير المتجانسة:

### *Non-Homogeneous Poisson process:*

إنَّ العملية النقطية التي تتنمذج على وفق نموذج بواسون تُعرف بالعملية البواسونية  
(Poisson Process)، والعملية البواسونية هي عملية تصادفية ذات فضاء حالة  $S$  منقطع،  
وفضاء معلمة  $T$  مستمر، وعادةً  $T$  يمثل الزمن. وفي هذه العملية لا تحدث الحوادث إطلاقاً في  
آنٍ واحد، أي إنَّ فرصة حدوث حادثتين أو أكثر في آنٍ واحد مهملة.

فإذا فرضنا إنَّ العملية النقطية  $\{N(t) ; t > 0\}$  هي عملية بواسونية بمتوسط  
حدوث الحوادث على المحور الزمني هو  $\lambda$ ، ويطلق عادةً على  $\lambda$  بالمعدل الزمني لحدوث  
الحوادث (Rate of Occurrence of Events)، فإنَّ  $\lambda$  هي معلمة العملية  
البواسونية وهي ثابتة مع الزمن (أي لا تتغير بتغير الزمن). أما إذا كانت  $\lambda$  متغيره،  
أي إنَّها تتغير بتغير الزمن، فإن العملية  $\{N(t) ; t > 0\}$  هي عملية بواسونية غير متجانسة  
(Non-Homogeneous Poisson Process)، إذ إنَّ حدوث الحوادث في العملية البواسونية  
الاعتيادية يكون بشكل عشوائي خلال فترة زمنية معينة بنسبة حدوث ثابتة  $\lambda$  من الحوادث لكل  
وحدة زمنية، في حين إنَّ النسبة التي تحدث عندها الحوادث في العملية البواسونية غير  
المتجانسة تتغير بتغير الزمن، وتُسمى بالمعدل الزمني للحدوث أو يطلق عليها  
دالة الشدَّة (Intensity Function) ويرمز لها بالرمز  $\lambda(t)$ . وتُعد دراسة العمليات  
البواسونية غير المتجانسة من الأمور المهمة لارتباطها بالحالات أو الظواهر الواقعية والتي  
يكون فيها المعدل الزمني لحدوث الحوادث يتغير بتغير الزمن (أي دالة بدلالة الزمن  $t$ ).

3. المقدّر ألبّي للمعدل الزمني للحدوث:

**Kernel Estimator of the Rate of Occurrence:**

لو فرضنا أن  $\{N(t) ; t > 0\}$  تمثل عدد الحوادث التي تحدث في الفترة الزمنية  $(0, t_0)$ ، إذ أنّ  $t_0$  تمثل زمن حدوث الحادثة الأخيرة، وفرضنا أنّ العملية التصادفية  $\{X_n, n \geq 1\}$  تمثل أوقات الحدوث البينية للحوادث أو الفترات الزمنية بين حدوث الحوادث. وفي هذه الدراسة تمّ اقتراح استخدام مقدر لامعلمي للمعدل الزمني للحدوث  $\lambda(t)$  ينتمي إلى فصيلة المقدّرات ألبّي (Kernel Estimators) ويتميّز هذا المقدّر بأنه مقدّر ممهد (Smooth) خالٍ من التعرجات الحادة، كما أنه لا يعتمد على أية فروض صارمة مما يؤدي بالنتيجة إلى إعطاء صورة واضحة ونقيّة للشكل العام للدالة  $\lambda(t)$ . والمقدّر المقترح استخدامه له الصيغة العامة الآتية:

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{b(n)} \sum_{j=1}^n W\left(\frac{t-t_j}{b(n)}\right), \quad t > 0 \quad \dots\dots (1)$$

إذ إنّ  $n$  تمثل عدد الحوادث التي حدثت في الفترة الزمنية  $(0, t_0)$ ، و  $t_1, t_2, \dots, t_n$  تمثل الفترات بين حدوث الحوادث أو المشاهدات (Inter Event Times). أما الدالة  $W(\cdot)$  فإنها تمثل دالة اللب، وهي دالة محددة قابلة للتكامل وموزونة وغير سالبة (Bounded, Non-Negative, Integrable Weight Function) وتحقق الشرطين الآتيين (ذنون، 1998):

i)  $W(u) \geq 0 \quad \forall u$  ,

ii)  $\int_{-\infty}^{\infty} W(u) du = 1$  .

وتسمى الدالة  $W(\cdot)$  عادةً بدالة النافذة (Window Function) وتقوم بتهيئ المقدر وإزالة التعرجات منه. أما  $b(n)$  فهي دالة سعة القيد (Band Width) وتسمى معلمة التمهيد (Smoothing Parameter)، إذ إنّ دالة سعة القيد يشترط فيها أنها تساوي صفرًا عندما  $n$  تقترب من المالانهاية. أما بالنسبة لاختيار معلمة سعة القيد  $b(n)$  فهناك تفاصيل نظرية عديدة معطاة من قبل الباحثين [Wand and Jones, 1995] و [Bowman and Azzalini, 1997] وكذلك [Loader, 1999]. وهنالك معالجة أخرى لاختيار معلمة دالة سعة القيد وذلك باختيار عدد صحيح وموجب، مثل  $k$ ، ومن ثم تُعرّف سعة القيد عند نقطة مثل  $x$  لكي تكون القيمة الأصغر  $h$  بحيث أن مركز الدائرة عند النقطة  $x$  بنصف قطر  $h$  يحتوي على  $k$  من نقاط البيانات [Peng, 2003]. والأقرب لنوع معلمة سعة

القيود هي الطريقة المستعملة من لدن الباحثين [Zhuang et al., 2002] وفي بحث [Choi and Hall, 1998] الذين استخدموا طريقة التجربة والخطأ لاختيار قيمة  $k$ . ومن المعروف جيداً إن الاختيار لدالة النافذة  $W(\cdot)$  من الأهمية أقل بكثير من اختيار معلمة سعة القيد. فهناك العديد من دوال النافذة المقترحة من قبل العديد من الباحثين في هذا الموضوع، كما في بحث [Thanoon, 1994] الذي استخدم نافذة بارتليت (Bartlett Window) والتي تسمى بالنافذة المثلثية (Triangular Window) والتي تُعرف رياضياً بالشكل الآتي:

$$W(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{m} & ; |x| \leq m \\ 0 & ; |x| > m \end{cases} \quad \dots\dots (2)$$

إذ إن  $m$  تمثل نقطة القطع (Truncation Point). إن النافذة المثلثية في أعلاه تتميز بالسهولة والكفاءة مقارنة مع النوافذ الأخرى المعروفة، كنافذة المستطيل ونافذة بارزن (Parzen Window) ونافذة كاوز (Gaussian Window) التي لها الصيغة الآتية:

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \dots\dots (3)$$

#### 4. مقدر القطع الحكيمة الخطي:

##### *Piecewise Linear Estimator:*

من المعروف جيداً بأن العلاقات والصيغ الخطية هي من أسهل العلاقات الرياضية من حيث البناء الرياضي، ونتيجة لذلك نجد بأن الصيغ الخطية قد شاعت وانتشرت في شتى المجالات. من ناحية ثانية فإن أغلب العلاقات الواقعية في شتى التطبيقات تكون ذات شكل غير خطي (Non-Linear). إن الصعوبة الرئيسية في العملية البواسونية غير المتجانسة تكمن في أن المعدل الزمني للحدوث  $\lambda(t)$  هو دالة غير معروفة الشكل أو الصيغة بدلالة الزمن  $t$ ، لذا ففي أغلب البحوث تم اقتراح شكل رياضي معين لهذه الدالة. وبالتأكيد فإن الشكل المقترح للدالة  $\lambda(t)$  قد يكون مناسباً أو غير مناسب حسب طبيعة المسألة قيد الدراسة.

إن الفكرة التي تراودنا لتقدير  $\lambda(t)$  تتضمن أن يكون التقدير في مرحلتين: في المرحلة الأولى يتم تحديد الشكل الدقيق للدالة  $\lambda(t)$  بيانياً من خلال القيام بعملية التقدير اللبي لهذه الدالة بالمقدّر  $\hat{I}^{(1)}(t)$  في ضوء البيانات المتوافرة. أما في المرحلة الثانية، وبعد دراسة الشكل العام للمقدّر  $\hat{I}^{(1)}(t)$  بدقة وحكمة (Wisdom)، فيتم تقريب المقدّر  $\hat{I}^{(1)}(t)$  بالمقدّر  $\hat{I}^{(2)}(t)$  والذي هو عبارة عن قطع حكيمة خطية.

لو فرضنا أنَّ  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  تمثل أزمنة حدوث الحوادث في عملية بواسونية غير متجانسة خلال الفترة الزمنية  $T_0=(0, t_0)$ . ولو كان  $\lambda(t)$  يمثل المعدل الزمني لحدوث الحوادث لهذه العملية، فإنَّ المقدَّر ألبّي لهذه المعلمة، وحسب العلاقة (1)، سيكون بالشكل الآتي:

$$\hat{I}^{(1)}(t) = \frac{1}{b(n)} \sum_{j=1}^n W\left(\frac{t-t_j}{b(n)}\right) \quad \dots\dots (4)$$

وبعد رسم المقدَّر  $\hat{I}^{(1)}(t)$  عند قيم مختلفة للدليل  $t$  في الفترة  $T_0$ ، يُدرس الشكل الناتج بحكمة ثم تقسم الفترة  $T_0$  إلى عدد محدود، مثل  $k$ ، من الفترات الزمنية الجزئية غير المتداخلة  $T_1, T_2, \dots, T_k$  بحيث إنَّ:

$$T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k = T_0 \quad ; \quad T_i \cap T_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

بحيث يكون شكل الدالة في كل فترة زمنية قريباً من شكل خط مستقيم.

أما المرحلة الثانية من التقدير فتتضمن التقدير المعلمي، إذ يُقَطَّع المقدَّر ألبّي  $\hat{I}^{(1)}(t)$  إلى مجموعة صغيرة من القطع الحكيمة ويتم ملائمة نموذج انحداري خطي لكل قطعة من القطع الحكيمة لكي نحصل في النهاية على مقدَّر القطع الحكيمة الخطية الآتي:

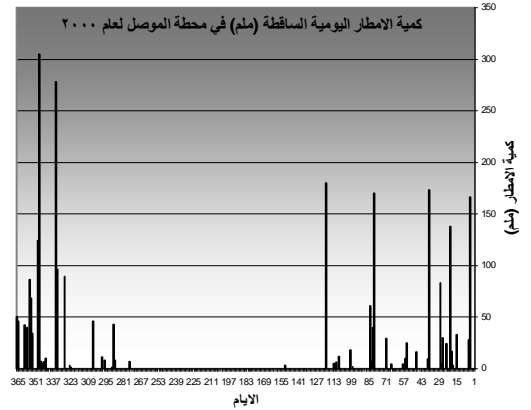
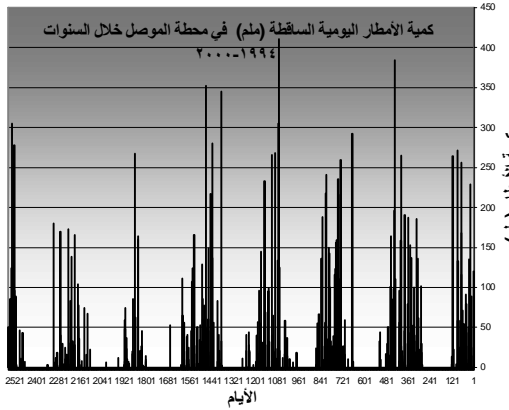
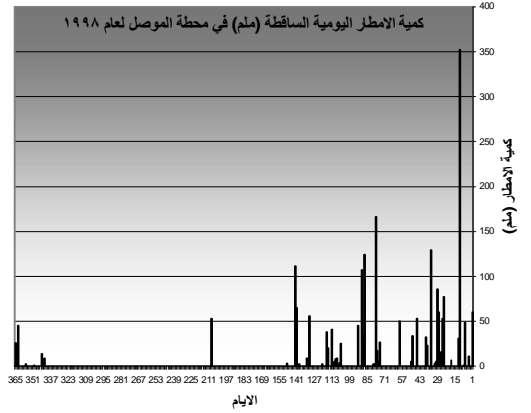
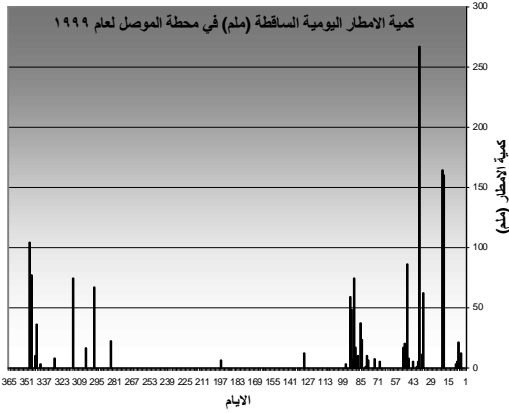
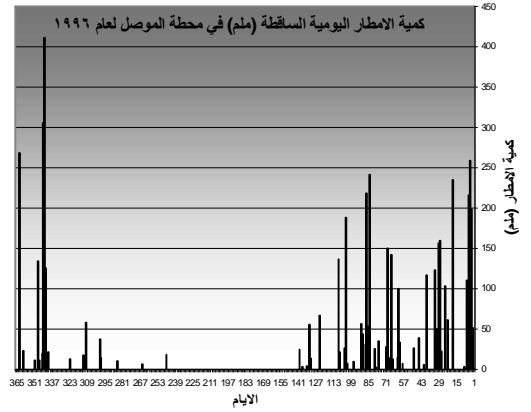
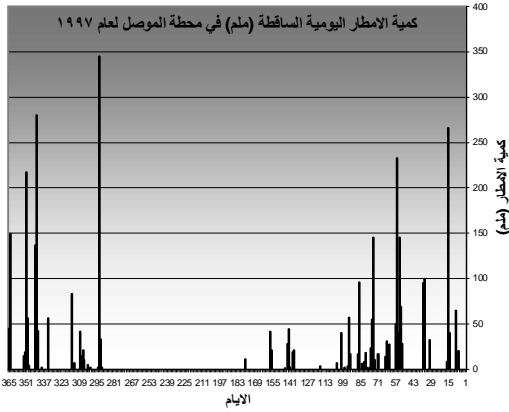
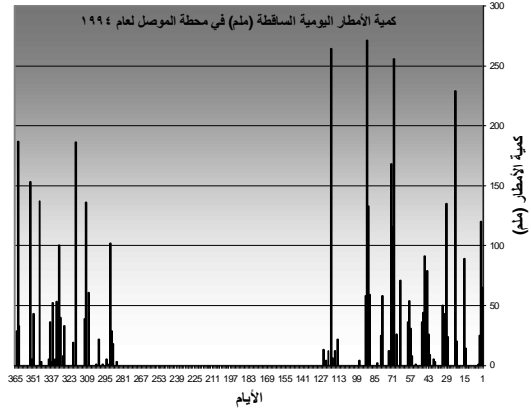
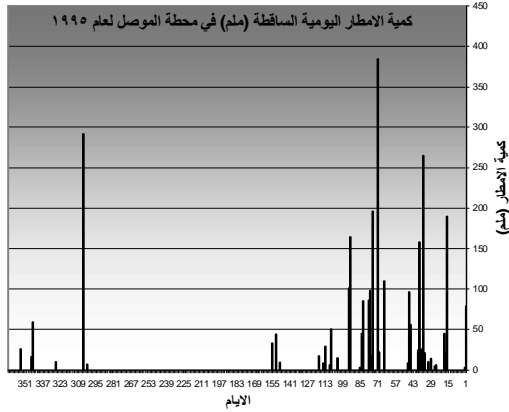
$$\hat{I}^{(2)}(t) = \begin{cases} \hat{a}_1 + \hat{b}_1 t & \text{if } t \in T_1 \\ \hat{a}_2 + \hat{b}_2 t & \text{if } t \in T_2 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \hat{a}_k + \hat{b}_k t & \text{if } t \in T_k \end{cases} \quad \dots\dots (5)$$

إذ إنَّ  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \mathbf{K}, \hat{a}_k, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \mathbf{K}, \hat{b}_k$  هي المقدرات التي نحصل عليها من ملائمة نموذج انحداري ولكل قطعة من القطع الحكيمة على حده.

##### 5. تطبيق عن الأمطار في محطة الموصل للأنواء الجوية في محافظة نينوى:

##### *Application of Rainfall in Mosul Weather Forecasting Station of Neneva:*

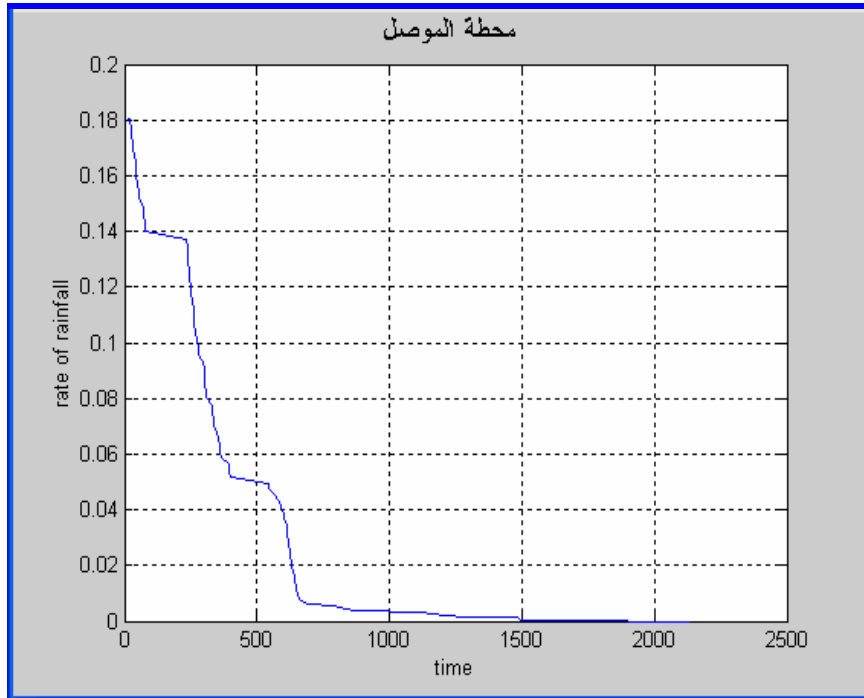
كجانب تطبيقي لهذا البحث تم اختيار المعدلات اليومية لحدوث الأمطار في محطة الموصل للأنواء الجوية في محافظة نينوى للفترة من عام 1994 ولغاية عام 2000 [السليمان، 2006]. إنَّ الرسم الزمني للأمطار اليومية المسجلة في هذه المحطة موضح في الشكل (1) لكل سنة على حدة وكذلك للسنتين السبع مجتمعةً. ويبدو واضحاً منطقيّة النمذجة النقطية للأمطار، كما يُلاحظ موسميّة الأمطار فضلاً عن سلوكها الذي يبدو غير متماثل بين سنة وأخرى مما يُعد مؤشراً على أنَّ العمليات التصادفية قيد الدراسة تعتمد على الزمن (Time Dependent) في سلوكها، أي إنها عمليات غير متجانسة (Non-Homogeneous Processes).





الشكل (1): كمية الأمطار اليومية الساقطة (مم) في محطة الموصل.

إنَّ الطريقة المقترحة للتقدير تتم بمرحلتين، وكما بيَّنا في فقرات سابقة في المرحلة الأولى يتم رسم المقدَّر أَلبي للمعدل اليومي لحدوث الأمطار في المحطة قيد الدراسة. وقد تم إعداد برنامج خاص باللُّغة لبرمجية MATLAB v.7 لإيجاد المقدَّر أَلبي للمعدل اليومي لحدوث الأمطار في محطة الموصل وهو كما موضح في الشكل (2) ، وتُجدر الملاحظة إلى إنَّ النافذة التي تم استخدامها لتقدير المقدَّر أَلبي هي النافذة المثلثية (نافذة بارتليت) المعروفة بكفاءتها، أما معلمة سعة القيد المستخدمة  $b(n)$  فكانت الانحراف المعياري للفترات بين حدوث الحوادث.



الشكل (2): المقدَّر أَلبي  $\hat{I}^{(1)}(t)$  للمعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطة الموصل.

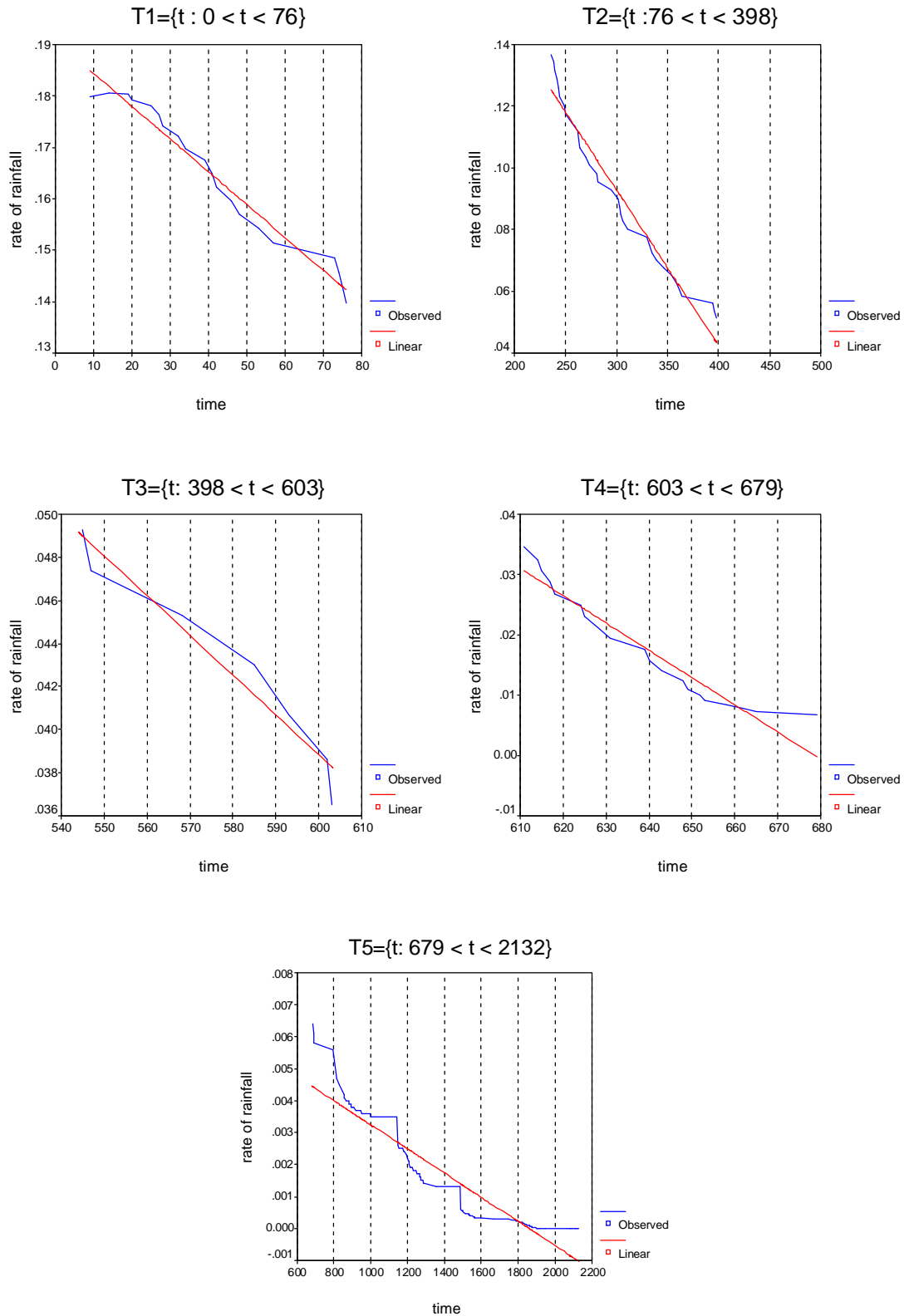
أما المرحلة الثانية من التقدير فيتم فيها تقطيع المقدَّر الذي تم الحصول عليه في المرحلة الأولى بحكمة للحصول على مقدَّرات القطع الحكيمة الخطية (Piecewise Linear Estimators) فضلاً عن المعادلة الخطية الملائمة للمقدَّر في كل فترة من الفترات الجزئية.



من الشكل (2) يمكن إيجاد مقدر القطع الحكيم للمعدل اليومي لحدوث الأمطار في محطة الموصل وذلك من خلال ملاءمة نموذج انحداري خطي في كل قطعة من القطع الحكيم لكي نحصل على مقدر القطع الحكيم الخطية الآتي والذي تم إيجاده باستخدام النظام الجاهز SPSS:

$$\hat{I}^{(2)}(t) = \begin{cases} 0.1907 - 0.000600t & ; & 0 < t \leq 76 \\ 0.2443 - 0.000500t & ; & 76 < t \leq 398 \\ 0.1498 - 0.000200t & ; & 398 < t \leq 603 \\ 0.3073 - 0.000500t & ; & 603 < t \leq 679 \\ 0.0070 - 0.000004t & ; & 679 < t \leq 2132 \end{cases} \dots \dots (6)$$

والشكل (3) يبين مقدر القطع الحكيم للمعدل اليومي لحدوث الأمطار في محطة الموصل. إذ أنّ المنحنيات المتعرجة في الشكل تبين المقدر اللبي، في حين أنّ الخطوط المستقيمة توضح مقدرات القطع الحكيم، ولكل قطعة على حده والموضحة معادلاتها في الصيغ (6).



الشكل(3): مقدر القطع الحكيم  $\hat{I}^{(2)}(t)$  للمعدل اليومي لحدوث الأمطار في محطة الموصل.

6. المناقشة:

يُلاحظ من الشكل (2) أنّ اتجاه العملية باتجاه التناقص، مما يدل على أنّ المعدل اليومي لحدوث الأمطار في محطة الموصل يتناقص بمرور الزمن. إنّ هذه الطريقة تزودنا بمقدّر للمعدل اليومي لحدوث الأمطار للمحطة قيد الدراسة وبفترات زمنية محددة بشكل منفصل عن بعضها البعض، هذه الطريقة أعطت تقديرات دقيقة لكل مرحلة من مراحل المعدل اليومي لحدوث الأمطار المختلفة ممّا يعزز عدم تجانس العملية المطرية قيد الدراسة، كما يعزز سبب استخدام هذه الطريقة مع العمليات النقطية غير المتجانسة.

ولغرض اختبار كفاءة الطريقة المقترحة فقد قام الباحث الأول في أطروحته للدكتوراه بأخذ شكلين من الأشكال المعروفة للمعلمة  $\lambda(t)$ . أما الشكل الأول فهو الذي اقترحه الباحثان [Cox and Lewis, 1966] والذي وصف  $\lambda(t)$  بأنها دالة لاخطية (Non-Linear Function) أو أسية، والتي سميت (Cox Function) نسبةً إلى الباحث الذي اقترحها والتي لها الشكل الآتي:

$$I(t) = e^{(a+bt)} ; \quad 0 < t \leq t_0 \quad \dots \dots (7)$$

إذ إنّ  $t_0$  هو زمن حدوث الحادثة الأخيرة، وأنّ  $a$ ,  $b$  هما معلمتا الدالة الأسية يمكن تقديرهما باستخدام طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method). إنّ دالة الإمكان للعملية البواسونية غير المتجانسة ذات المعدل الزمني للحدوث المعرف بالصيغة الأسية هي كما يأتي:

$$L = e^{(na+b \sum_{i=1}^n t_i)} \exp[-e^a (e^{bt_0} - 1) / b] \quad \dots \dots (8)$$

وعليه فإنّ مقدّر الإمكان الأعظم للمعلمة  $a$  عندما تكون  $b$  معلومة هو:

$$\hat{a} = \ln \left( \frac{nb}{e^{bt_0} - 1} \right) \quad \dots \dots (9)$$

أما بخصوص المعلمة  $b$  فلا يمكن إيجاد مقدّر الإمكان الأعظم لكون المعادلة الناجمة غير خطية، لذا تم استخدام الطرائق العددية (Numerical Methods) لهذا الغرض. وبعد إجراء بعض العمليات الرياضية تم الحصول على المقدّر التعاقبي للمعلمة  $b$  كما يأتي:

$$\hat{b}_i = \hat{b}_{i-1} - \left[ \frac{n}{\hat{b}_{i-1}} - \frac{nt_0}{(1 - e^{-\hat{b}_{i-1}t_0})} + \sum_{t_i} \left[ -\frac{n}{\hat{b}_{i-1}^2} - \frac{nt_0^2 e^{-\hat{b}_{i-1}t_0}}{(1 - e^{-\hat{b}_{i-1}t_0})^2} \right]^{-1}, 0 < t_i \leq t_0 \dots \dots (10) \right.$$

أما الشكل الثاني فهو الذي اقترحه الباحث [Duane, 1964] والذي وصف  $\lambda(t)$  بدالة وايبيل (Weibull Function) ، والشكل الرياضي لهذه الدالة هو كما يأتي:

$$I(t) = b I t^{b-1} \quad ; \quad t, \lambda, \beta > 0 \quad \dots \dots (11)$$

إذ إن  $\lambda, \beta$  هما معلمتا دالة وايبيل يمكن تقديرهما باستخدام طريقة الإمكان الأعظم أو طريقة المربعات الصغرى (Minimum Least Squares Method). إن دالة الإمكان الأعظم في عملية وايبيل (Weibull Process) هي بالشكل الآتي:

$$L = b^n I^n e^{-I t_0^b} \prod_{i=1}^n t_i^{b-1}, \quad 0 < t_i \leq t_0 \quad \dots \dots (12)$$

وبذلك يكون مقدر الإمكان الأعظم للمعلمتين  $\lambda, \beta$  كما يأتي:

$$\hat{b} = \frac{n}{n \ln t_0 - \sum_{i=1}^n \ln t_i} \quad \dots \dots (13)$$

$$\hat{I} = \frac{n}{t_0^b} \quad \dots \dots (14)$$

وبعد تطبيق المقدرات السابقة على البيانات قيد الدراسة تم الحصول على المقدرين الآتيين:

$$\hat{I}_{cox}(t) = e^{-(2.1051+0.0001927t)} \quad ; \quad 0 < t \leq 2132 \quad \dots (15)$$

$$\hat{I}_{wei}(t) = 0.8718 * 0.2669 t^{0.8718-1} \quad ; \quad 0 < t \leq 2132 \quad \dots (16)$$

ولغرض إجراء المقارنة بين المقدرات الثلاثة للمعدل اليومي لحدوث الأمطار في محطة الموصل للمعلمة  $\hat{I}(t)$ ، وهم  $\hat{I}_{cox}(t)$  و  $\hat{I}_{wei}(t)$  والمقدر  $\hat{I}^{(2)}(t)$  الذي سوف نرسم له بالرسم  $\hat{I}_{pwl}(t)$ ، فقد تم حساب معدل مربع الخطأ (Mean Square Error) وذلك باعتبار أن المقدر اللبي  $\hat{I}^{(1)}(t)$  هو الأساس للمقارنة باعتباره مقدرًا لا معلمياً.

فلو كانت  $t'_1, t'_2, \dots, t'_k, \mathbf{K}$  تمثل النقاط الزمنية التي تم إيجاد قيم المقدر أَلبي عندها، فإن مربع معدل الخطأ يكون بالشكل الآتي:

$$MSE_{cox} = k^{-1} \sum_{j=1}^k [\hat{I}_{cox}(t_j) - \hat{I}^{(1)}(t_j)]^2 \quad \dots (17)$$

$$MSE_{wei} = k^{-1} \sum_{j=1}^k [\hat{I}_{wei}(t_j) - \hat{I}^{(1)}(t_j)]^2 \quad \dots (18)$$

$$MSE_{pwl} = k^{-1} \sum_{j=1}^k [\hat{I}_{pwl}(t_j) - \hat{I}^{(1)}(t_j)]^2 \quad \dots (19)$$

إذ إنَّ  $MSE_{cox}$ ،  $MSE_{wei}$ ،  $MSE_{pwl}$  ترمز إلى معدل مربع الخطأ للمقدرات  $\hat{I}_{cox}(t)$  و  $\hat{I}_{wei}(t)$  و  $\hat{I}_{pwl}(t)$  على التوالي. وبعد استكمال الإجراءات الحسابية تم الحصول على النتائج الآتية:

$$MSE_{cox} = 0.007045$$

$$MSE_{wei} = 0.006703$$

$$MSE_{pwl} = 0.000048$$

من هذه النتائج يتضح بأنَّ المقدرين  $\hat{I}_{cox}(t)$  و  $\hat{I}_{wei}(t)$  يعطيان معدلين مربع خطأ متقاربين. أما مقدر القطع الحكيمة الخطية  $\hat{I}_{pwl}(t)$  فيعطي معدل مربع خطأ قليل جداً مقارنةً بالمقدرين الآخرين مما يؤكد دقة وكفاءة هذا المقدر.

#### المصادر

1. ذنون، باسل يونس، (1998)، "التقدير أَلبي: أسلوب بياني في التقدير الإحصائي". مجلة علوم الرافدين، المجلد 9، العدد 1، ص 89-99.
2. السليمان، مثنى صبحي، (2006)، "التحليل الإحصائي للعملية البواسونية غير المتجانسة مع تطبيق"، أطروحة دكتوراه غير منشورة، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل.
3. Bowman, A. W. and Azzalini, A. (1997), "Applied Smoothing Techniques for Analysis: The Kernel Approach with S-PLUS Illustrations". Oxford University Press.
4. Choi, E. and Hall, P. (1998), "Non parametric approach to analysis of space-time data on earthquake occurrence". Journal of Computational and Graphical Statistics, 8, 733-748.

5. Cox, D. R., and Lewis, P. A. (1966), "**Statistical Analysis of Series of Events**". Chapman and Hall, London, United Kingdom.
6. Duane, J. T. (1964), "**Learning curve approach to reliability monitoring**". IEEE Transaction on Aerospace, As-vol(2), 563-566.
7. Helmers, R. and Mangku, I. W. (2000), "**Statistical estimation of Poisson intensity functions**". Centrum Voor Wiskunde en Informatica Report, PNA-R 9913 Submitted for Publication.
8. Loader, C. (1999), "**Local Regression and Likelihood**". Springer, New York.
9. Peng, R. D. (2003), "**Application of multi-dimensional point procss Methodology to wildfire hazard assessment**". Ph. D., University of California, Los Angeles.
10. Thanoon, B. Y. (1994), "**A graphical approach of estimating of functional form of the relationship between two random variables or time series**". Journal Education and Science, 15, 337-345.
11. Wand, M. P., and Jones, M.C. (1995), "**Kernel Smoothing**". Chapman and Hall, London.
12. Zhuang, J., Ogata, Y. and Vere-Jones, D. (2002), "**Stochastic declustering of space-time earthquake occurrences**". Journal of the American Statistical Association, 97, 369-380.