تقدير بيز للأنموذج الخطي العشوائي ثنائي التقسيم بوجود التفاعل[1]

د. محمد نذير إسماعيل قاسم — أستاذ مساعد
السيدة نجلاء صديق يحيى ابليش — مدرس مساعد
كلية التربية / قسم الرياضيات

الملخص

في هذا البحث يتم دراسة تقدير معلمات الأنموذج الخطي العشوائي ثنائي التقسيم مع وجود التفاعل ، المحتوي على أربع معلمات والتي تمثل s_1^2 مركبة تباين تـأثير العامـل **A** و s_2^2 مركبة تباين تأثير العامل **B** و s_3^2 مركبة تباين تأثير التفاعل وهو العامـل **AB** و s_4^2 مركبة تباين تأثير الخطأ العشوائي تم تقدير هذه المعلمات باستخدام مقدر بيز غير المتحيـز ألتربيعـي **Bayes Quadratic Unbiased Estimator (BAQUE)** بعـد افتـراض المعلومات الأولية هي المعلومات المحصل عليها باستخدام أسلوب تحليـل التبـاين لتمثـل معلومات أولية لهذه المعلمات ومن ثم الحصول على التوزيـع الاحتمـالي الاولـي الـذي افترضناه بوصفه توزيعاً منتظماً .

تم تطبيق (BAQUE) على بيانات حقيقية تم الحصول عليها من جامعة الموصل / كلية الزراعة والغابات / قسم المحاصيل الزراعية . وهذه البيانات تمثل تطوير زراعة الذرة الصفراء بحيث يمثل التطوير ثلاثة عوامل هي : عامل صنف الذرة الصفراء وعامـل نـسبة السماد النتروجيني والعامل الثالث هو التفاعل . تم سحب عينة عشوائية من هذه البيانـات من اجل الحصول على الأنموذج الخطي العشوائي . وكانت نتائج التقدير مشجعة جداً .

On Bayesian Estimation Of Random Two-way Classification Model with Interaction

ABSTRACT

This research deals with the estimation of linear random two-way classification model with interaction, containing four parameters. These are: s_1^2 variance of effect A, s_2^2 variance of effect s_3^2 variance of interaction AB and s_4^2 variance of random error. These parameters are estimated through using Bayes Quadratic Unbiased Estimator (BAQUE).

The prior information obtained by using variance analysis technique to represent prior estimates of these parameters. Then, the prior distribution is considered as a uniform distribution.

BAQUE approach is applied to real data obtained from Mosul University/ College of Agriculture and Forestry / Department of Crops, and these data represent the development of planting yellow corn that the development has three factors which are the corn type, the quantity of nitrogen fertilizer and the interaction between them. Then a random sample was taken from these data to get the random

---
([1]) بحث مستل من رسالة ماجستير ، قسم الرياضيات / كلية التربية / جامعة الموصل (2008).

model. The results of estimates that have been obtained are very encouraging.

1- مقدمة :

يتناول هذا البحث مقدرات معلمات مركبات التباين في الأنموذج العشوائي ثنائي التقسيم مع وجود التفاعل وهذه المعلمات تعتبر متغيرات عشوائية لها توزيعات طبيعية حسب الافتراض الذي نفترضه بطريقة مقدر بيز غير المتحيز ألتربيعي وقد حصلنا بهذه الطريقة على مقدرات جيدة بعد اعتماد القيم الابتدائية لهذه المعلمات من تقديرات القيم المتوقعة في جدول تحليل التباين.

وتشير المراجع والبحوث العلمية إلى إن مسألة تقدير معلمات مركبات التباين هي مسألة حديثة وقديمة ولا زالت البحوث مستمرة في هذا المجال انظر على سبيل المثال لا الحصر .

Zeger and karim (1991), Besag and Green (1993), Gui, *et. al* (1995), Chaturvedi (1996), Mistal (1997), Taraldsen and Lindqvist (2007).

ولا شك إن هذه الدراسات في تزايد وتطور مستمرين وكان للباحثين في جامعة الموصل دور في دراسة مركبات التباين في النماذج الخطية ذات التأثيرات العشوائية . انظر، سالم (1997) ، فتحي (1998) ، قاسم ، عباس (2001) ، إسماعيل (2005) ، وإبراهيم (2007) وفتحي (2006) ، إذ تم الحصول من دراسة سابقة على مقدر بيز غير المتحيز التربيعي للنماذج الخطية احادية التقسيم والنماذج الخطية في الإحصاء المكاني والنماذج الهرمية الحركية في الانحدار بعد افتراض توفر المعلومات الأولية عن المعلمات التي تشمل توزيعاً احتمالياً أوليا لهذه المعلمات .

ويعتمد مقدر بيز غير المتحيز التربيعي على تقدير الدالة الخطية لمركبات (لمعلمات) التباين ويتميز هذا الأسلوب من وجهة نظر بيز بسهولة التطبيق العملي للأنموذج الخطي العام من دون اية عمليات حول الحصول على التوزيع الاحتمالي اللاحق Posterior Distribution.

وهو يعتمد فقط على العزمين الاول والثاني للتوزيعات الاحتمالية الاولية ، التي تعتبر معلومات اولية للمعلمات أي مركبات التباين .

ويتضمن الجانب التطبيقي الذي يشمل البيانات واللانموذج الخطي العشوائي وتحليل البيانات باسلوب تحليل التباين ومن جدول تحليل التباين حصلنا على القيم الابتدائية للمعلمات تم تطبيق اسلوب مقدر بيز غير المتحيز التربيعي .

ونعتبر الانموذج الخطي الذي يتمثل بالمعادلة الرياضية الاتية :

$$y_{ijk} = m + a_i + b_j + g_{ij} + e_{ijk} \qquad \ldots\ldots(1)$$

حيث ان : $k = 1,2,\mathbf{K},n$ $\quad j = 1,2,\mathbf{K},b$ $\quad i = 1,2,\mathbf{K},a$

حيث ان **a** عدد مستويات العامل الاول و **b** عدد مستويات العامل الثاني و**n** عدد التكــررات لكل من التوافقات للعامل الاول والثاني .

حيث ان :

m : الوسط العام للمشاهدات .

a_i : تأثير عشوائي للصف i

b_j : تأثير عشوائي للعمود j

g_{ij} : تأثير عشوائي للتفاعل بين الصف i والعمود j .

y_{ijk} : المشاهدة k في الصف i والعمود j .

e_{ijk} : الخطأ العشوائي للمشاهدة y_{ijk}

ونفترض ان a_i و b_j و g_{ij} و e_{ijk} متغيرات عشوائية مستقلة وتتوزع توزيعــاً طبيعيــاً بتوقع صفر وتباين $s_1^2, s_2^2, s_3^2, s_4^2$ على التوالي .

وتسمى $s_1^2, s_2^2, s_3^2, s_4^2$ مركبات التباين للمشاهدة y_{ijk} حيث ان

$Var(y_{ijk}) = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2$

هدفنا تقدير هذه المعلمات باستخدام اسلوب مقدر بيــز غيــر المتحيــز التربيعــي **(BAQUE)**.

2- مقدر بيز غير المتحيز التربيعي :

Bayes Quadratic Unbiased Estimator (BAQUE)

يمكن إعادة كتابة الأنموذج (1) بصيغة المصفوفات وكما موضح في الشكل الآتي :

$$Y = Fm + ZU + e \qquad \text{.......(2)}$$

اذ ان :

Y : متجهة المشاهدات ذات بعد $N \times 1$. حيث **N=abn**

m : الوسط العام وهي قيمة غير اتجاهية **scalar** .

F : متجه ذو بعد N من الواحدات .

Z_i : مصفوفة تصميم ذات بعد $N \times q_i$ معلومة ، ولها الشكل الاتي :

$$Z_i = (Z_1, Z_2, \mathbf{K}, Z_r)'$$

U : متجه ذو بعد $q_i x1$ من التأثيرات العشوائية ، اذ أن :

$$U = (U_1, U_2, \mathbf{K}, U_r)'$$

e : متجه ذو بعد $N\times 1$ من الأخطاء العشوائية

ان الفروض الأساسية على الأنموذج (2)

$$e \sim N\left(0, s_e^2 I_N\right)$$
$$U \sim N\left(0,\ diag\left(s_1^2 Iq_1, s_2^2 Iq_2, s_3^2 Iq_3, \ldots, s_r^2 Iq_r\right)\right) \qquad \ldots\ldots(3)$$
$$Cov(U,e)=0$$

ووفق هذه الفروض يكون لدينا

$$Y \sim N(Fm, V)$$
$$Y=\left(y_1, y_2, \ldots, y_N\right)'$$
$$Var(y)=V=\sum_{i=1}^{r} s_i^2 Z_i Z_i' + s_e^2 I_N \qquad \ldots\ldots(4)$$
$$=\sum_{i=1}^{r+1} s_i^2 Z_i Z_i'$$

اذ أن :

$$s_4^2 = s_e^2$$
$$Z_4 Z_4' = I_N$$

(3) المعلمـــــات $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_{r+1}^2$ تـــدعى مركبـــات التبـــاين **Variance Components**.

3- كيفية التعبير عن المصفوفات Z

إن المصفوفات Z في الأنموذج (2) معلومة ، ويمكن كتابــه الأنمــوذج (1) فـــي المصفوفات وكما يلي :

$$Y = Fm + Z_1U_1 + Z_2U_2 + Z_3U_3 + e \qquad \ldots\ldots(5)$$

أنظر **Searle and Casella (1992)**

إذ أن $F=(1,1,\ldots,1)'$ متجه بسعة N , من الواحدات وأن المشاهدات تكتب بشكل متجه صفاً صفاً:

U_1 : متجه التأثير العشوائي للصفوف .

U_2 : متجه التأثير العشوائي للاعمدة .

U_3 : متجه التأثير العشوائي للتفاعل .

تحسب المصفوفات Z_i بواسطة حاصل كرونيكر وكما يلي :

$$Z_1 = I_a \otimes 1_b \otimes 1_n$$
$$Z_2 = 1_a \otimes I_b \otimes 1_n$$
$$Z_3 = I_a \otimes I_b \otimes 1_n$$

$$Z_4 = I_a \otimes I_b \otimes I_n$$

و $\otimes$ ترمز حاصل كروينكر .

ليس هدفنا في هذا البحث تقدير المعلمة m الموجودة في الانموذج (5) ، حيث انه من الممكن التخلص منها وذلك بضرب (5) في مصفوفة الاسقاط M التي لها الصيغة الاتية:

$$M = I - F(F'F)^{-1}F'$$

$$MY = MFm + MZ_1U_1 + MZ_2U_2 + MZ_3U_3 + Me \qquad \text{.......(6)}$$

وبما أن $MF = 0$ حسب خاصية مصفوفة الاسقاط M

يكون لدينا :

$$MY = MZ_1U_1 + MZ_2U_2 + MZ_3U_3 + Me$$

نفرض أن $MY = X$

وعليه فإن الأنموذج الخطي العام يكون على النحو الآتي :

$$X = MZ_1U_1 + MZ_2U_2 + MZ_3U_3 + Me \qquad \text{.......(7)}$$

$$\mathrm{E}(X) = 0, \mathrm{E}(Me) = ME(e) = 0$$

$$Var(X) = MZ_1 Var(U_1)(MZ_1)' + MZ_2 Var(U_2)(MZ_2)' + MZ_3 Var(U_3)(MZ_3)' + M\,Var(e)M'$$

ونفرض ان:

$$G_i = MZ_i \quad , \qquad i = 1,2,3,$$

$$Var(X) = G_1\, diag\, s_1^2 I_{q_1} G_1' + G_2\, diag\, s_2^2 I_{q_2} G_2' + G_3\, diag\, s_3^2 I_{q_3} G_3' + M\, diag\, s_4^2 I_N M'$$

والمصفوفة **M** متماثلة وغير قابلة للنمو (صماء) : **Idempolent**

$$M = M' = M^2$$

$$Var(X) = s_1^2 G_1 G_1' + s_2^2 G_2 G_2' + s_3^2 G_3 G_3' + s_4^2 M$$

نفرض أن :

$$V_i = G_i G_i' \quad , \qquad i = 1,2,3$$

$$Var(X) = s_1^2 V_1 + s_2^2 V_2 + s_3^2 V_3 + s_4^2 V_4$$

اذ ان $V_4 = M$.

نفرض ان

$$q_i = s_i^2 \quad , \qquad (i = 1,2,3,4)$$

وبما أن $Var(X)$ هي دالة بدلالة المعلمات q_i

إذن يمكن كتابة

$$Var(X)=\sum(q)$$

وإن مصفوفة التباين $\sum(q)$ يمكن التعبير عنها بالشكل الآتي :

$$\sum(q)=q_1V_1+q_2V_2+q_3V_3+q_4V_4 \qquad \text{.......(8)}$$

وهي مصفوفة متماثلة بسعة $N\times N$.

إن المصفوفة $\sum(q)$ هي حالة خاصة من الأنموذج الذي اقترحه **Kleffe and Pincas (1974)** . وأن المعلمات q_1,q_2,q_3,q_4 تقدر بواسطة تقدير الدالة الخطية التي اقترحها **Rao (1974)** وصيغتها بالشكل الآتي :

$$a(X)=\mathbf{l}_1q_1+\mathbf{l}_2q_2+\mathbf{l}_3q_3+\mathbf{l}_4q_4=\mathbf{l}'q \qquad \text{.......(9)}$$

انظر **Mistal (1997)** .

اذ أن $\mathbf{l}=(\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3,\mathbf{l}_4)'$, $q=(q_1,q_2,q_3,q_4)'$

والدالة الخطية $a(X)$ تقدر بواسطة الشكل الثنائي **Quadratic form**

$$\hat{a}=X'AX$$

إن A مصفوفة متماثلة بسعة $N\times N$ مطلوب إيجادها من البيانات ، وان $\hat{a}$ تحقق الشروط الآتية :

1. عدم التحيز **Unbiasedness** .
2. تصغير دالة مجازفة بيز . انظر **Rao and Kleffe (1988)** .

وفي حالة وجود دالة التوزيع الأولي $g(q)$ للمعلمة $q=(q_1,q_2,q_3,q_4)'$ فإن دالة الخسارة التربيعية تأخذ الصيغة الآتية :

$$L(\hat{a},a)=(\hat{a}-a)^2 \qquad \text{.......(10)}$$

وإن دالة المجازفة تكون كما يأتي :

$$R(\hat{a},a)=\mathrm{E}[L(\hat{a},a)]=\mathrm{E}\left[(\hat{a}-a)^2\right]$$

بينما تأخذ دالة مجازفة بير $B(\hat{a})$ الشكل الآتي :

$$B(\hat{a})=\mathrm{E}_q[R(\hat{a},a)]=\mathrm{E}_q\left[\mathrm{E}(\hat{a}-a)^2\right]$$

$$B(\hat{a})=\int_{q\in\Omega}R(\hat{a},a)g(q)dq$$

$$=\int_{q\in\Omega}\mathrm{E}_q(\hat{a}-a)^2g(q)dq \quad , \quad \Omega=\{q:q_1,q_2,q_3,q_4>0\} \qquad \text{.......(11)}$$

نبرهن شرط عدم التحيز .

البرهان : يقال للتقدير $\hat{a}$ تقديراً غير متحيز للدالة الخطية a إذا كانت :

$$\mathrm{E}(\hat{a})=\mathrm{E}(X'AX)=a$$
$$\mathrm{E}(X'AX)=\mathrm{E}(tr\,(X'AX))$$
$$\mathrm{E}(tr\,AX\,X')=tr\,A\mathrm{E}(X\,X')$$
$$\mathrm{E}(X\,X')=Var(X)=\sum(q)$$
$$=q_1V_1+q_2V_2+q_3V_3+q_4V_4$$
$$\mathrm{E}(\hat{a})=tr\,A(q_1V_1+q_2V_2+q_3V_3+q_4V_4)$$
$$=tr\,A\sum_{i=1}^{4}q_iV_i$$
$$=\sum_{i=1}^{4}q_i\,tr\,AV_i$$

يكون $\hat{a}$ غير متحيز بالنسبة الى a اذا فقط اذا :

$$tr\,AV_i=\mathbf{l}_i \qquad , \qquad i=1,2,3,4 \qquad \text{.......(12)}$$

أي أن :

$$\mathrm{E}(\hat{a})=\sum_{i=1}^{4}\mathbf{l}_i\,q_i=\mathbf{l}'q=a$$

البرهان : يعتمد تصغير دالة مجازفة بيز على تصغير دالة المجازفة كما يأتي :

من (11) لدينا العلاقة

$$B(\hat{a})=\int_{q\in\Omega}\mathrm{E}_q(\hat{a}-a)^2\,g(q)dq$$
$$=\mathrm{E}_q\left[\mathrm{E}(\hat{a}-a)^2\right]=\mathrm{E}_q\left[\mathrm{E}(\hat{a}-\mathrm{E}(\hat{a}))^2\right]$$
$$=\mathrm{E}_q\left[Var(\hat{a})\right]=\mathrm{E}_q\left[Var(X'AX)\right]$$
$$=\mathrm{E}_q\left[2tr\,AVar(X')AVar(X)\right]$$
$$=\mathrm{E}_q\left[2tr\,A\sum(q)A\sum(q)\right]$$
$$=\mathrm{E}_q\left[2tr\,A\sum_{i=1}^{4}V_iq_i\,A\sum_{i=1}^{4}V_iq_i\right]$$
$$=\mathrm{E}_q\left[2\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}q_iq_j\,tr\,AV_iAV_j\right]$$
$$B(\hat{a})=2\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\mathrm{E}(q_iq_j)tr\,AV_iAV_j \qquad \text{.......(13)}$$

اذ أن : $\mathrm{E}(q_iq_j)$ يمثل العزم الثاني بالنسبة للمعلمة q_i ومصفوفة العزم الثاني هي :

$$\mathrm{E}(qq')=C=(\mathrm{E}(q_iq_j))=Var(q)+\mathrm{E}(q)(\mathrm{E}(q))'$$

حيث ان : $i, j = 1,2,3,4$

ويمكن تمثيل المصفوفة C بالشكل الآتي :

$$C = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{4} r_{ik} r_{kj} \right) \quad , \quad i, j = 1,2,3,4 \qquad \text{.......(14)}$$

أي أن C تساوي حاصل ضرب المصفوفتين اللتين تمثلان جذري المصفوفة C

$$C = \sqrt{C}\sqrt{C} = RR$$

بتعويض (14) في (13) ينتج أن

$$B(\hat{a}) = 2 \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} r_{ik} r_{kj}\, tr\, AV_i AV_j$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{4} tr\, A \left(\sum_{i=1}^{4} r_{ik} V_i \right) A \left(\sum_{j=1}^{4} r_{kj} V_j \right)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{4} trAT_k AT_k \qquad \text{.......(15)}$$

اذ أن

$$T_k = \sum_{i=1}^{4} r_{ik} V_i \quad , \quad k = 1,2,3,4$$

ولحل العلاقة (15) نستخدم طريقة لاكرانج وفقاً الى شرط عدم التحيز (12) للحصول على قيمة قصوى صغرى ، ومن أجل ذلك نفرض ان :

$$S = 2 \sum_{k=1}^{4} trAT_k AT_k + 4 \sum_{i=1}^{4} l_i (trAV_i - \mathbf{l}_i) \qquad \text{.......(16)}$$

اذ أن l_i تمثل مضاريب لاكرانج **Lagrange Multipliers** ونشتق (16) بالنسبة الى A ثم نجعل المشتقة مساوية للصفر فنحصل على :

$$\frac{dS}{dA} = 4 \sum_{k=1}^{4} T_k AT_k + 4 \sum_{i=1}^{4} l_i V_i = 0$$

أي أن

$$= \sum_{k=1}^{4} T_k AT_k + \sum_{i=1}^{4} l_i V_i = 0 \qquad \text{.......(17)}$$

ثم نشتق (16) بالنسبة الى l_i وبمساواة المشتقة بالصفر يكون .

$$\frac{dS}{d\,l_i} = 4(trAV_i - \mathbf{l}_i) = 0$$

لهذا

$$trAV_i = \mathbf{l}_i \quad , \quad i = 1,2,3,4 \qquad \text{.......(18)}$$

إن المعادلتين (17) و(18) تكون على شكل مصفوفات ، والمجهول فيها هو المصفوفة A ومضاريب لاكرانج $l_i\ (i = 1,2,3,4)$ ، ومن أجل الحل وإيجاد قيم المجاهيل نحول المعادلات من صيغ نظام المصفوفات الى نظام معادلات خطية ونستخدم في ذلك عملية المتجه **Vec Operation** . ونتيجة لذلك نحصل على :

$$\left(\sum_{k=1}^{4} T_k \otimes T_k\right) VecA + \sum_{i=1}^{4} l_i VecV_i = 0 \qquad \text{.......(19)}$$

$$(VecV_i)' VecA = \mathbf{l}_i \quad , \quad i = 1,2,3,4 \qquad \text{.......(20)}$$

ويمكن التعبير عن المعادلة (19) بالصيغة الآتية

$$H\, VecA + \sum_{i=1}^{4} l_i VecV_i = 0 \qquad \text{.......(21)}$$

اذ ان :

$$H = \sum_{k=1}^{4} T_k \otimes T_k$$

ويمكن صياغة نظام المعادلات الخطية (20) و(21) على النحو الآتي :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} VecV_1 & VecV_2 & VecV_3 & VecV_4 & H \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_1' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_2' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_3' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_4' \end{array}\right] \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ VecA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \\ \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{l}_4 \end{bmatrix} \qquad \text{.......(22)}$$

ليكن

G : تمثل مصفوفة النظام (22) وبسعة $(N^2+4)\times(N^2+4)$.

W : يمثل متجه المجاهيل في النظام (22) وبسعة (N^2+4) .

B : يمثل متجه الثوابت في النظام (22) وبسعة (N^2+4) .

اذن يمكن كتابة نظام المعادلات (22) بالصيغة الآتية :

$$GW = B \qquad ....(23)$$

واذا كانت G قابلة للانعكاس فيكون

$$W = G^{-1}B \qquad ....(24)$$

وبإيجاد قيم المجاهيل W الذي يحتوي على $VecA, l_i$ يمكن إيجاد المصفوفة A التي بواسطتها يمكن الحصول على تقدير مركبات التباين (q_1,q_2,q_3,q_4) وذلك من الشكل الثنائي $\hat{a} = X'AX$ لكونه تقديراً غير متحيز للدالة الخطية :

$$a(X) = \mathbf{l}_1 q_1 + \mathbf{l}_2 q_2 + \mathbf{l}_3 q_3 + \mathbf{l}_4 q_4 = \mathbf{l}'q \qquad ....(25)$$

اذا وفقط اذا :

$$trAV_i = \mathbf{l}_i \quad , \qquad i = 1,2,3,4$$

راجع (12)

مثلاً لإيجاد $\hat{q}_1$ الذي هو تقدير للمعلمة q_1 نــضع $\mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_3 = \mathbf{l}_4 = 0, \mathbf{l}_1 = 1$ فــي (22) ونــضع $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_3 = \mathbf{l}_4 = 0, \mathbf{l}_2 = 1$ فنحــصل علــى $\hat{q}_2$ وهــو تقــدير للمعلمــة q_2 ونــضع $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_4 = 0, \mathbf{l}_3 = 1$ فنحــصل علــى $\hat{q}_3$ وهــو تقــدير للمعلمــة q_3 ثــم نــضع $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_3 = 0, \mathbf{l}_4 = 1$ فنحصل على $\hat{q}_4$ وهو تقدير للمعلمة q_4.

وأيضاً لو طلب تقدير $\hat{q}_1 + \hat{q}_2$ نضع $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2 = 1,\ \mathbf{l}_3 = \mathbf{l}_4 = 0$ وكــذلك لــو طلب تقدير $\hat{q}_1 + \hat{q}_2 + \hat{q}_3$ نضع $\mathbf{l}_4 = 0$ وتصبح قيمة $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_3 = 1$.

وأيضاً لو طلب تقدير $\frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{2}$ نضع $\mathbf{l}_3 = \mathbf{l}_4 = 0$ وتصبح قيمة $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2 = \frac{1}{2}$ وهكذا .

4- التوزيع الاولي للمعلمات q_i

حسب قاعدة Jeffreys (1961) يمكن تحديد دالة كثافة احتماليــة أوليــة Prior Pdf لمركبات التباين q_1,q_2,q_3,q_4 وذلــك بــافتراض التوزيــع المنــتظم Uniform Distribution الذي يعتبر ابسط توزيع اولي وقد افترضنا هكذا لتوفر معلومات قليلة جــداً عن المعلمات q_i أي ان :

$$g(q) = \frac{1}{\bar{q} - \underline{q}} \quad \underline{q} \le q \le \bar{q} \qquad ....(26)$$

اذ $\underline{q}$ تمثل الحد الادنى للمعلمات و $\bar{q}$ تمثل الحد الاعلى للمعلمات . وفرض أن المعلمات (q_1, q_2, q_3, q_4) مستقلة أي أن

$$g(q_1, q_2, q_3, q_4) = g(q_1)g(q_2)g(q_3)g(q_4)$$

لذلك يكون

$$Cov(q_i, q_j) = 0 \qquad i \neq j = 1,2,3,4$$

فينتج لدينا :

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\bar{b}_1 + \underline{b}_1}{2} \\ \frac{\bar{b}_2 + \underline{b}_2}{2} \\ \frac{\bar{b}_3 + \underline{b}_3}{2} \\ \frac{\bar{b}_4 + \underline{b}_4}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\bar{b}_1 + \underline{b}_1}{2} & \frac{\bar{b}_2 + \underline{b}_2}{2} & \frac{\bar{b}_3 + \underline{b}_3}{2} & \frac{\bar{b}_4 + \underline{b}_4}{2} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{(\bar{b}_1 - \underline{b}_1)^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\bar{b}_2 - \underline{b}_2)^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\bar{b}_3 - \underline{b}_3)^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\bar{b}_4 - \underline{b}_4)^2}{12} \end{bmatrix} \quad \text{.......(27)}$$

إن المصفوفة C تكون بمثابة المعلومات الأولية حول المعلمات q_1, q_2, q_3, q_4

أنظر **Taraldsen and Lindqvist (2007)** .

ثم نجد جذر المصفوفة C :

$$C = RR = (r_{ij})(r_{ij}) \qquad , \qquad i, j = 1,2,3,4 \qquad \text{.......(28)}$$

5- الجانب التطبيقي :

لقد طبقت النتائج النظرية في هذا البحث على بيانات حقيقية مصدرها تجارب نفّذت من البرنامج الوطني لتطوير زراعة الذرة الصفراء في العراق لسنة (2005) . وكانت البيانات على النحو الاتي :

جدول (1) : يمثل بيانات عن الذرة الصفراء

العامل B / العامل A	d_1	d_2	d_3	d_4
g_1	**21.82 23.4 20.78**	**19.45 20.38 21.12**	**20.35 21.13 20.24**	**26.31 25.2 25.81**
g_2	**21.05 19.12 19.81**	**18.42 18.82 19.2**	**19.31 20.65 19.1**	**17.81 18.04 17.73**
g_3	**18.94 19.74 19.17**	**23.04 22.55 23.14**	**23.65 24.13 24.03**	**24.52 26.1 25.84**
g_4	**19.37 19.8 21.15**	**19.52 17.98 20.43**	**17.82 18.05 17.14**	**17.88 18.34 18.92**
g_5	**27.25 25.92 28.06**	**20.35 21.04 21.15**	**27.35 26.32 27.87**	**17.62 16.82 18.02**
g_6	**18.31 19.18 19.91**	**18.2 18.62 19.08**	**18.52 19.62 18.51**	**20.35 20.1 19.72**

حيث ان :

a : هي ست سلالات نقية من الذرة الصفراء .

b : اربعة مستويات من السماد النتروجيني .

n : التكرار لكل خلية .

نفترض ان مجتمع نبات الذرة الصفراء هو مجتمع ذو حجم كبير ومن اجل جعل هذا الأنموذج عشوائياً ثنائي التقسيم مع وجود التفاعل فلابد من سحب عينة عشوائية من مجتمع نبات الذرة الصفراء ولنفترض ان حجم العينة هو (24) ، اذ تم سحب العينة العشوائية باستخدام جداول الأرقام العشوائية (Snedecore and Cochran (1980 حصلنا على العينة العشوائية الاتية كما في جدول (2):

جدول (2) : يمثل الصفوف والاعمدة للعينة العشوائية

العامل B / العامل A	d_1(1)	d_3(2)	d_4(3)	مجموع الصفوف
$g_2(1)$	21.05 19.81 $(y_{11\bullet})$	19.31 19.1 $(y_{12\bullet})$	17.81 18.04 $(y_{13\bullet})$	$y_{1\bullet\bullet}$
$g_3(2)$	18.94 19.74 $(y_{21\bullet})$	23.65 24.13 $(y_{22\bullet})$	24.52 25.84 $(y_{23\bullet})$	$y_{2\bullet\bullet}$
$g_4(3)$	19.37 19.8 $(y_{31\bullet})$	17.82 18.05 $(y_{32\bullet})$	18.34 18.92 $(y_{33\bullet})$	$y_{3\bullet\bullet}$
$g_6(4)$	18.31 19.18 $(y_{41\bullet})$	18.52 19.62 $(y_{42\bullet})$	20.35 20.1 $(y_{43\bullet})$	$y_{4\bullet\bullet}$
مجموع الأعمدة	$y_{\bullet 1 \bullet}$	$y_{\bullet 2 \bullet}$	$y_{\bullet 3 \bullet}$	$y_{\bullet\bullet\bullet}$

اذ ان :

$y_{\bullet\bullet\bullet}$: المجموع العام لنتائج جميع المشاهدات من العينة العشوائية ويعبر عنه بالرمز $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$

$\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$: الوسط العام ويعبر عنه بالرمز $\frac{y_{\bullet\bullet\bullet}}{abn}$

وهنا n=2, b=3, a=4

$$y_{i\bullet\bullet} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} y_{ijk}$$

$$y_{\bullet j \bullet} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{2} y_{ijk}$$

$$y_{ij\bullet} = \sum_{k=1}^{2} y_{ijk}$$

اذ ان :

$y_{i\bullet\bullet}$: مجموع نتائج جميع المشاهدات للعامل i .

$y_{\bullet j \bullet}$: مجموع نتائج جميع المشاهدات للعامل j .

$y_{ij\bullet}$: مجموع المشاهدات في الخلية الواقعة في الصف i والعمود j .

ومن ثم تطبيق طريقة تحليل التباين (ANOVA) وظهرت النتائج في جدول تحليل التباين على النحو الاتي :

جدول (3) : تحليل التباين

مصدر التباين $(S.O.V)$	مجموع المربعات $(S.S.)$	درجات الحرية $(D.F.)$	متوسط المربعات $(M.S.)$	توقع متوسط المربعات $E(M.S.)$
بين الصفوف	**111.8620**	**3**	**37.2873**	$\hat{s}_1^2 = 1.6972$
بين الاعمدة	**12.7074**	**2**	**6.3537**	$\hat{s}_2^2 = -2.5935 \simeq 0$
التفاعل بين الصفوف والاعمدة	**162.6248**	**6**	**27.1041**	$\hat{s}_3^2 = 13.3016$
الخطأ	**6.0119**	**12**	**0.5010**	$\hat{s}_4^2 = 0.5010$
الكلي	**293.2062**	**23**		

ومن الجدير بالملاحظة ان $\hat{s}_2^2 = -(2.5938)$ وهذا ما يناقض تعريف التباين الواجب ان تكون له قيمة غير سالبة **nonnegative** $\left(\hat{s}_2^2 \geq 0\right)$ الا ان التباين السالب هو مشكلة موجودة في علم الاحصاء ودرست من علماء عديدين مثلاً **Rao and Kleffe (1988), Marshall and Mardia (1985), Searle (1971)** ، وفي حالة القيمة السالبة للتباين تكون قيمة التباين مساوية للصفر .

$$\hat{s}_2^2 = 0$$

ومن ثم تطبيق اسلوب **BAQUE** المذكور في الجانب النظري اذ تعتبر التقديرات التي حصلنا عليها في جدول (3) قيماً اولية للمعلمات مع اعتبار دالة الخسارة التربيعية اذ تم عد التوزيع الاولي للمعلمات بوصفه توزيعاً منتظماً وهذا التوزيع يعتبر اضعف التوزيعات الاولية وابسطها .

وقد اضطررنا اعتبار هذا التوزيع اولياً بسبب عدم توفر معلومات اولية أو تاريخية عن هذه المعلمات **Box and Tiao (1973), Jeffreys (1961)** .

ومن معرفة التوزيعات الاولية للمعلمات نحصل على العزم الاول والثاني للمعلمات وهذه العزوم هي المطلوبة في اسلوب **(BAQUE)** .

افرض $q_i = s_i^2 \ , \ i = 1,2,3,4$

حصلنا على التقديرات الاولية باستخدام طريقة تحليل التباين فكانت

$$\hat{q}_1 = 1.6972 \ \ , \ \hat{q}_2 = 0 \ \ , \ \hat{q}_3 = 13.3016 \ \ , \ \hat{q}_4 = 0.5010$$

ومما تقدم فقد اعتبرنا المعلومات الاولية للمعلمـــات q_4, q_3, q_2, q_1 آخـــذة نمـــط التوزيع المنتظم وباستخدام المعادلات في (26) نحصل على :

$$g(q_1) = f(q_1) = \frac{1}{1.6972} = 0.5892 \qquad 0 < q_1 < 1.6972$$

$$g(q_3) = f(q_3) = \frac{1}{13.3016} = 0.0752 \qquad 0 < q_3 < 13.3016$$

$$g(q_4) = f(q_4) = \frac{1}{0.5010} = 1.9960 \qquad 0 < q_4 < 0.5010$$

وباستخدام النتائج في (27) نحصل على

$$C = \begin{bmatrix} 0.9602 & 0 & 5.6439 & 0.2126 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.6439 & 0 & 58.9773 & 1.6660 \\ 0.2126 & 0 & 1.6660 & 0.0837 \end{bmatrix}$$

وكانت نتائج تقديرات بيز بوساطة اسلوب (BAQUE) على النحو الاتي:

$\hat{s}_1^2$	$\hat{s}_2^2$	$\hat{s}_3^2$	$\hat{s}_4^2$
1.521	**-2.59 $\simeq$ 0**	**12.986**	**0.4615**

حيث ان $\hat{s}_1$ $\hat{s}_1^2 = \hat{q}_1$

يمكن برمجة الخوارزميات باستخدام نظام MATLAB7 نلاحظ من الجدول اعـــلاه ان التقديرات مقاربة جداً من التقديرات التي حصلنا عليها باسلوب تحليـــل التبـــاين وهـــذه النتائج مشجعة جداً .

وايضاً استخدمنا اسلوب التكرار لحين الوصول الى خطأ 10^{-6} وكان التقارب سريعاً .

6- الاستنتاجات والتوصيات :

1- اعتبار نتائج تقدير معلمات التباين من جدول تحليل التبـايـن قيمـاً ابتدائيـة لهـذه المعلمات تم استخدامها في اسلوب (BAQUE) .

2- اظهر تحليل التباين ان تقدير $\hat{s}_2^2$ (تباين تأثير الاعمدة) هو سالب وهـذا منـاقض لتعريف التباين الذي يجب ان يكون غير سالب ($\hat{s}_2^2 \geq 0$) وهنا يجب نعتبره مساوياً للصفر.

3- تم اعتبار التوزيع المنتظم كتوزيع اولي للمعلمات في اسـلوب (BAQUE) وهنـا التوزيع يعتبر اضعف المعلومات عن المعلومات .

4- يمكن اعتبار التوزيع الاولي كتوزيع اسي او وتوزيع مربع كاي .... الخ . وحـسب لمعلومات التاريخية المتوفرة عن المعلمات واستخدام اسلوب التكرار **Iteration**

5- يمكن افتراض القيم الابتدائية قيمـاً لاعلـى التعيـين ومحاولـة تكـرار اسـلوب (BAQUE) للحصول على التقارب **Convergence** دون تطبيق اسـلوب تحليـل التباين للحصول على القيم الابتدائية ولأي تصميم مثلاً تصميم ثلاثـي التقـسيم او رباعي التقسيم او تصميم المربع اللاتيني .... الخ .

المصادر

1. إسماعيل ، يونس حازم ، (2005) ، "الكشف عن القـيم الـشاذة باسـتخدام التوزيـع المختلط بالاعتماد على معاينة جبس وأسلوب بيز" ، (رسالة ماجستير غير منـشورة) ، كليةالتربية ، جامعة الموصل .

2. سالم ، سلطان علي ، (1997) ، "تقدير مركبات التغاير المكاني" ، (رسالة ماجستير غير منشورة) ، كلية التربية ، جامعة الموصل .

3. فتحي ، ايمان طارق ، (2006) ، "تقدير بيز في النماذج الخطية المختلطـة باسـتخدام معاينة جبس" ، (رسالة ماجستير غير منشورة) ، كلية التربية ، جامعة الموصل .

4. فتحي ، يونس محمد ، (1998) ، "تقدير بيز لدوال التغاير الفراغي بمعلمتـين وثـلاث معالم" ، (رسالة ماجستير غير منشورة) ، كلية التربية ، جامعة الموصل .

5. قاسم ، محمد نذير ، ابراهيم ، اغصان محمود ، (2006) ، "تقدير مكونات التباين بواسطة التعظيم غير الخطي" ، المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (10) 2006 ، ص ص [48-60] ، جامعة الموصل ، كلية علوم الحاسبات والرياضيات .

6. قاسم ، محمد نذير ، عباس ، سمير عبد الجبار ، (2001) ، "استخدام اسلوب بيز في تقدير مركبات التباين لنموذج التأثير العشوائي الاحادي التقسيم" ، المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (1) 2001 ، ص ص [69-81] ، جامعة الموصل ، كلية علوم الحاسبات والرياضيات .

7. Besag, J. and Green, P.J. (1993): Spatial Statistical and Bayesian Computation. J.R. Statist. Soc. B., 55, No. 1, pp. 25–37.
8. Box, G.E.P. and Tiao, G.C. (1973): Bayesian Inference in Statistical Analysis. Addison–Wesley Publishing Company, California, London.
9. Chaturvedi, A. (1996): Robust Bayesian Analysis of the Linear Regression Model. J. of Statistical Planning and Inference, 50, 175–178.
10. Gui, H., Stein, A. and Myers, D.E. (1995): Extension of Spatial Information, Bayesian Kriging and Updating of Prior Variogram Parameters. Envrmtrc, 6, pp. 373–384.
11. Jeffreys, H. (1961): Theory of Probability. Clarenden Press, Oxford, London.
12. Kleffe, J. and Pincus, R. (1974): Bayes and Best Quadratic Unbiased Estimator for Parameters of the Covariance Matrix in Linear Model Math, Operation Statist 5, p. 43–67.

13. Marshall, R.J. and Mardia, K.V.(1985) minimum Norm Quadratic Estimation of components of spatial covariance. Math Geo., Vol. 17, No. 5, pp.517-525.
14. Mistal, I. (1997): Estimation of variance components with large–scale Dominance models.
15. Rao, C.R. (1972): "Estimation of variance and covariance components in linear models" J. Am. Statist. Assoc., vol. 67, p. 112–115.
16. Rao, C.R. and Kleffe, J. (1988): Estimation of variance component and application north Holland, Amsterdam.
17. Searl, S.R. (1971): Linear Models. John Wiley, New York.
18. Searl, S.R. Casella, G. and McCulloch, C.E. (1992): Variance component. Wiley, New York.
19. Snedecor and Cochran (1980): Statistical Method (seventh edition), University Press U.S.A.
20. Taraldsen, G. and Lindqvist, B.H. (2007): Bayes Theorem for Improper priors. http://www.math.ntnu.no/preprint/statistics.
21. Zeger, S.L. and Karim, M.R. (1991): Generalized Linear Models with Random Effect; A Gibbs Assoc. 86, No. 413, 79–86.