الجريان للازمني للأغشية الرقيقة اللزجة على سطح صلب

د.نصر مجيد احمد — أستاذ مساعد
خضر محمد صالح — مدرس مساعد
كلية علوم الحاسبات والرياضيات/قسم الرياضيات

الملخص

في هذا البحث تمت دراسة الجريان الثنائي البعد لغشاء سائل رقيق مناظر لزج يجري على سطح صلب بإهمال قوي القصور الذاتي، وقد استخدمت معادلات نافير – ستوكس لإيجاد المعادلة التي تحكم هذا الجريان. وتم حل هذه المعادلات تحليلاً.

Steady flow to Viscous Thin films on solid surface

Abstract

In This paper we consider two dimensional flow to a viscous symmetric thin liquid film flow on solid surface with no inertia force . Navier – stokes equation has been used to find the equation that governs this flow , we solve these equations analytically.

المقدمة : Interdncation

إن الرغوة (Foam) والأغشية الرقيقة (thins film) التي عادة ما تتكون من هـواء وسـائل لزج مع الشد السطحي (surface tension) هي حالة خاصة في ميكانيك المواقع والتي لهـا أهمية كبيرة في كثير من التطبيقات الصناعية مثل عملية طلاء أسطح الرسم والطبقات الفضية على أقراص (CD) المدمجة.

درس (E.O.Tuckand L.W.Schwartz ، 1990) الطريقة العددية لحل بعض المعـادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبـة الثالثـة والمتعلقـة بجريـان الأغـشية ، ودرس (1997 ، B.R.Duffy and S.k.Wilson) جريان الأغشية الرقيقة اللزجة للمواقع والتي يكون فيهـا الغشاء سطحاً حراً بوجود الشد السطحي ، كما درس كـل مـن Janmen.J.Kn , smann and Michael T. Misis,1998) جريان الأغشية الرقيقة على سطح صـلب مائـل مـع وجود الشد الـسطحي وباسـتخدام نظريـة الترتيـب . ودرس (M.A.S Majeed , 2002) الجريان اللازمني في الأغشية الرقيقة بإهمال قـوي القـصور الـذاتي ، ودرس (Khider M.S.Khider,2003) الجريان الزج في بعض الأغشية الرقيقة السائلة المائلة.

وفي بحثنا هذا سوف نتطرق إلى دراسة الجريان اللازمني للأغشية الرقيقة اللزجة على سطح صلب بصورة أفقية.

المعادلات التي تحكم الجريان Governing equation

لوصف الجريان الثنائي البعد لمائع غير قابل للانضباط نأخذ الاحداثيات الكارتيزية $\bar{x}$,$\bar{y}$ حيث أن الاحداثي $\bar{x}$ هو الاحداثي المتناظر وان الجريان يكون باتجاه الاحداثي $\bar{x}$ وان الاحداثي $\bar{y}$ يكون عموديا عليه.

نفرض أن $\bar{v}, \bar{u}$ هي مركبات السرعة في الاتجاهين $\bar{y}, \bar{x}$ على الترتيب وان $\bar{p}$ يمثل الضغط.

لتكن معادلة السرعة للغشاء بالصيغة :-

$$\bar{y} = \bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2)$$

سوف نحضر اهتمامنا بالمسالة التي يكون فيها $\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} << 1$ على المجال $\bar{x}$

و بهذا يمكن إهمال الحد $(\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}})^2$ من معادلة الانحناء والتي لهما الصيغة:-

$$k = \frac{\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2}}{\left[1 + (\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}})^2\right]^{3/2}}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3)$$

فتصبح بالصيغة:-

$$k = \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.4)$$

وان معادلة الاستمرارية للجريان الثنائي لها الصيغة:-

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(2.5)$$

ومعادلتي الزخم (معادلات نافيرستوكس) في الثنائي البعد لها الصيغة:-

$$r\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + m\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) + r g_{\bar{x}}. \qquad \ldots..(2.6)$$

$$r\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + m\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) + r g_{\bar{y}} \qquad \ldots\ldots...(2.7)$$

وباستخدام نظرية ألتزيت للمعادلتين (2.6) و (2.7) نحصل على

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = m \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \qquad \text{..................(2.8)}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -rg \qquad \text{..................(2.9)}$$

(حيث أن التعجيل باتجاه $\bar{y}$ سالب).

(3-1) المتغيرات اللابعدية: Non- dimensional

سوف نعرف المتغيرات الابعدية كالأتي:-[4]

$$\bar{x} = Hx \ , \quad \bar{y} = Hy \quad . \quad \bar{t} = \frac{H}{v} t \ , \quad \bar{u} = uU \ , \quad \bar{v} = vU$$

$$\bar{p} = \frac{d}{H} p \ , \quad \bar{h} = Hh \qquad \text{..................(3.2)}$$

(4-1) الشروط الحدودية : Boundary Conditions

1- شرط عدم الانزلاق **No-slip condition**

$$\bar{u} = -U \ , \quad \bar{v} = 0 \ \ on \quad \bar{y} = 0 \qquad \text{.....................(4.2)}$$

2- شرط إجهاد القص (المماسي) على السطح الحر للغشاء

Tangential Stress Condition

$$t = m \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0 \ , \quad on \ \ \bar{y} = \bar{h} \qquad \text{......................(4.3)}$$

3- شرط الجهد العمودي: **Normal –Stress Condition**

$$\bar{p} = -s \ \ k \qquad \text{.......................(4.4)}$$

حيث أن sتمثل الشد السطحي.

بتعويض المعادلة (2.4) في المعادلة(4.4) نحصل على

$$\bar{p} = -s \ \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2} \ \text{.........................(4.5)}$$

4- شرط المشتقة التي تتبع الجسيم على السطح الحر .[4]

Material derivative at free surface condition

$$\bar{v}=\frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{x}} \qquad on \qquad \bar{y}=\bar{h} \qquad \text{……………………}(4.6)$$

وباستخدام المعادلة (3.2) في المعادلات (2.5) ، (2.8) ، (2.9) ، (4.2) ، (4.3) ، (4.4) (4.5) و (4.6) بالترتيب نحصل على :-

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \text{……………………}(4.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=ca\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{……………………}(4.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-B \qquad \text{……………………}(4.9)$$

حيث أن $ca=\frac{mU}{s}$ يمثل العدد العشري و $B=\frac{rgH^2}{s}$ يمثل عدد بوند

$$u=-1\,,\quad v=0 \quad on \quad y=0 \qquad \text{……………………}(4.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad on\ \ y=h \qquad \text{……………………}(4.11)$$

$$p=-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad on \quad y=h \qquad \text{……………………}(4.12)$$

$$v=\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}\,,\ on \quad y=h \qquad \text{……………………}(4.13)$$

(5-1) العمليات الرياضية لإيجاد المعادلة التي تحكم الجريان.

نكامل المعادلة (4.9) بالنسبة لــ y نحصل على:

$$p(x,t)=-By+f(x,t) \qquad \text{……………………}(5.2)$$

حيث إن f(x,t) ثابت التكامل.

ومن المعادلتين (4.12) و (5.2) عندما y=h نحصل على :

$$f(x,t)=-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+Bh \qquad \text{……………………}(5.3)$$

نعوض المعادلة (5.3) في المعادلة (5.2) فنحصل على :

$$p(x,t)=-By-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+Bh \qquad \text{……………………}(5.4)$$

نشتق المعادلة (5.4)بالنسبة لـــ x فنحصل على:-

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}+B\frac{\partial h}{\partial x} \qquad \text{......................}(5.5)$$

ومن المعادلة (4.8) و (5.5) نحصل على :-

$$ca\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B\frac{\partial h}{\partial x} \qquad \text{......................}(5.6)$$

نكامل المعادلة (5.6) بالنسبة لـــ y فنحصل على:-

$$ca\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}y+B\frac{\partial h}{\partial x}y+g(x,t) \qquad \text{......................}(5.7)$$

حيث $g(x,t)$ ثابت التكامل.

وباستخدام المعادلة (4.11)عندما y=h نحصل على

$$0=-\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}h-B\frac{\partial h}{\partial x}h+g(x,t)$$

أو

$$g(x,t)=\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}h-B\frac{\partial h}{\partial x}h \qquad \text{......................}(5.8)$$

نعوض المعادلة (5.8) في (5.7) فنحصل على :

$$ca\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}y+B\frac{\partial h}{\partial y}y+\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}h-B\frac{\partial h}{\partial x}h \qquad \text{...............}(5.9)$$

نكامل المعادلة (5.9) بالنسبة إلى y فنحصل على:-

$$cau=-\frac{y^2}{2}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}+\frac{y^2}{2}B\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}hy-B\frac{\partial h}{\partial x}hy+E(x,t) \qquad \text{.........}(5.10)$$

وباستخدام المعادلة (4.10) عندما y=h نحصل على:-

$$-ca=\mathrm{E}(x,t) \qquad \text{...................}(5.11)$$

نعوض المعادلة (5.11) في المعادلة (5.10) عندما y=h فنحصل على :-

$$cau=-\frac{h^2}{2}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}+\frac{h^2}{2}B\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}h^2-B\frac{\partial h}{\partial x}h^2-ca$$

أو

$$cau=\frac{h^2}{2}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}-\frac{h^2}{2}B\frac{\partial h}{\partial x}-ca \qquad \text{....................}(5.12)$$

بضرب طرفي المعادلة (5.12) في h وقسمتها على ca نحصل على :-

$$uh = \frac{h^3}{2ca}\left[\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - B\frac{\partial h}{\partial x}\right] - h \qquad \text{.......................(5.13)}$$

نشتق المعادلة (5.13) بالنسبة لـــ x فنحصل على :-

$$\frac{\partial}{\partial x}(uh) = \frac{h^3}{2ca}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - B\frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{\partial h}{\partial x} \qquad \text{.....................(5.14)}$$

وبتكامل المعادلة (4.7) بالنسبة لـــ y عندما y=h فنحصل على :-

$$v = -h\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{.......................(5.15)}$$

وبتعويض المعادلة (5.15) في (4.13) نحصل على :-

$$-h\frac{\partial h}{\partial x} - u\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

أو

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(uh) \qquad \text{.......................(5.16)}$$

وبتعويض المعادلة (5.16) في المعادلة (5.14) نحصل على :-

$$-\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h^3}{2ca}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - B\frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{\partial h}{\partial x} \qquad \text{......................(5.17)}$$

(6-1) الجريان اللازمني:- Steady flow

في حالة الجريان اللازمني فأن المعادلة (5.17) تصبح بالصيغة:-

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h^3}{2ca}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - B\frac{\partial h}{\partial x}\right] \qquad \text{......................(6.2)}$$

نكامل المعادلة (6.2) بالنسبة لـــ x فنحصل على :-

$$h = \frac{h^3}{2ca}\left[\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - B\frac{\partial h}{\partial x}\right] + A \qquad \text{........................(6.3)}$$

حيث أن A ثابت التكامل.

تضرب طرفي المعادلة (6.3) في $\frac{2ca}{h^3}$ فنحصل على :-

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = \frac{2cah}{h^3} - \frac{2caA}{h^3} \qquad \text{........................(6.4)}$$

وبفرض الثوابت $ca = \frac{1}{2}$, $A = 1,$ $B = 0$ نحصل على:-

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}=\frac{h-1}{h^3} \qquad \text{.........................(6.5)}$$

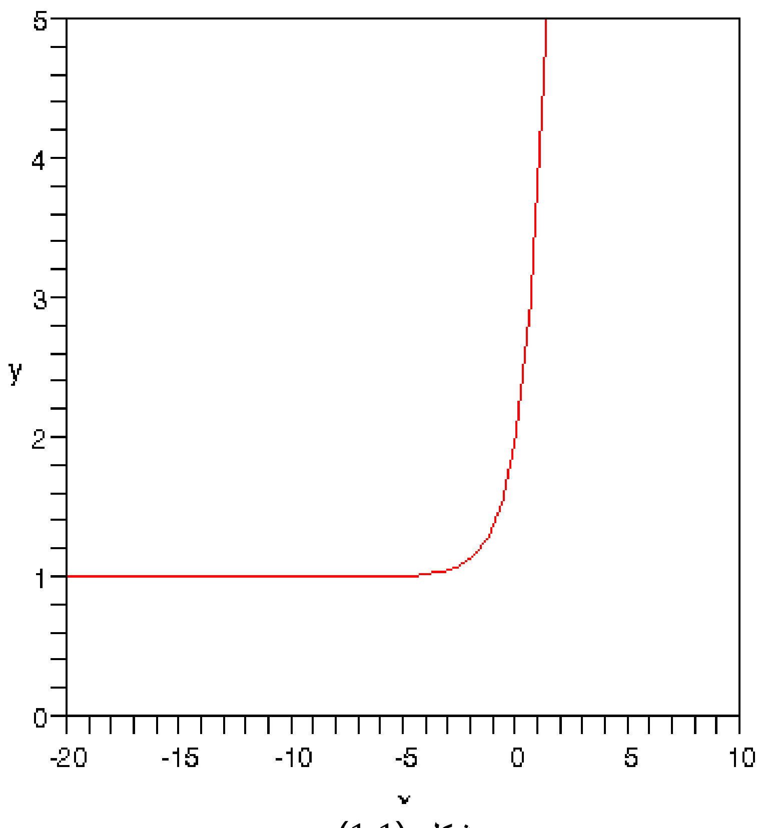
كل حل للمعادلة (6.5) والذي له أهمية في بحثنا هذا يمتلك منطقة تمثل الغشاء المناسب والتي تكون h فيها قريبة في الواحد، أي الخصائص التي تميز مختلف الحلول ممكن دراستها من المعادلة الخطية للمعادلة التفاضلية (6.5) عندما تكون h-1 صغيرة جداً أي أن:-

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}=h-1 \qquad \text{.........................(6.6)}$$

المعادلة (6.6) لها ثلاثة حلول حقيقية خطية مستقلة والحل العام لها يمكن كتابته بالصيغة:-

$$h-1=c_1e^x+c_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+c_3e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \qquad \text{...........(6.7)}$$

والحل العام للمعادلة (6.7) كما مبين في الشكل (1.1) بعد إعطاء قيم للثوابت $c_1=1, c_2=c_3=0$



شكل (1.1)

يمثل منحني الحل للمستوى (x، h) للمعادلة (6.7)

الاستنتاجات :- Conclusions

في دراستنا للجريان اللازمني للأغشية الرقيقة اللزجة على سطح صلب يتبين من حلول المعادلة التي تحكم الجريان بان سمك الغشاء يقترب من الواحد عندما تقترب x من القيم السالبة $h \to 1$ عندما $x \to -\infty$ بينما يتذبذب سمك الغشاء كلما اقترب x من الصفر.

المصادر: References

1. B.R. Duffy and S.K. Wilson, "A third–order deferential equation arising in thin–film flows and relevant to Tanner's Law", App. Math. Lebb, vol. 10, No. 3, pp. 63–68, 1997.
2. E.O.Tuck and L.W.Schwartz "Numerical and asymptotic study of some third-order ordinary differential equations relevant to draining and coating flows"No.3,pp.453-469,September 1990.
3. James J.Kriegsmann and Michael J. Miksis " Pressure driven disturbances on a thin viscous film" Phys.Fluids,Vol.10,No.6,June 1998.
4. Khider,M.S.Khider, "Viscous flow in certain inclined thin liquid films" M.Sc.thesis,University of Mosul 2003.
5. Majeed,M.A.S, "Steady flow in thin liquid films with negligible inertia" M.Sc.thesis, University of Mosul 2002.