استخدام نظرية السيطرة المثلى على شبكة انترنيت جامعة الموصل

أ.م.د احمد محمود السبعاوي   محمد احمد شهاب الكيلاني

الملخص:

تعد نظرية السيطرة المثلى من المواضيع المتطورة حديثاً وخصوصا السيطرة المثلى التي يمكن تمثيلها في وضع ديناميكي، ومن التطبيقات الحديثة للسيطرة هو في مجال الشبكات ذوات الجانبين.

تم في هذا البحث تطبيق نموذج السيطرة المثلى المقترح من قبل العالمين (Sun &Tse) عام (٢٠٠٧)، كحالة دراسية على مركز انترنيت جامعة الموصل(شبكة ذات جانبين) .

وقد تم احتساب الكميات المثالية المرسلة والمسحوبة للمشتركين خلال شهر واحد.

Using Optimal Control Theory On Mosul University Internet Network

ABSTRACT:

The theory of optimal control is considered one of the modern and developed subjects, especially which can be represented in a dynamic setting. One of the modern applications of the optimal control theory is the field two-sided networks, as the model of optimal control was applied in this study and which was suggested by the scientists (Sun & TSE) in 2007 and has been applied as a case study on Mosul University internet Center.

The optimal upload and download quantities of the subscribers during one month ,has been calculated through the application of the optimal control model .

بحث مستل من رسالة ماجستير

١ـ المقدمة

لتحقيق الامثلية في اي مسألة ديناميكية هناك تساؤل وهو مالمقدار المثالي للمتغيرات المختارة في كل لحظة من الزمن خلال الفترة المختارة ولمعالجة مثل هكذا مسائل هناك ثلاثة أساليب رئيسة متوافرة وهي نظرية السيطرة المثلى والبرمجة الديناميكية ونظرية حساب المتغيرات. وسوف نتناول نظرية السيطرة المثلى، إذ يتم تطبيقها في مجالات عديدة وخاصة في مجال الاقتصاد والهندسة.

٢ـ التمثيل الرياضي لنموذج أمثلي ديناميكي محدد الفترة[12][6][8][10]:

يمكن التمثيل الرياضي لنموذج ديناميكي محدد الفترة رياضيا بالاتي:

$$Max \int_0^T F(x(t),u(t),t)\,dt + q(x(T))$$

$$S.To$$

$$\dot{X}_i = f_i(x,u,t) \qquad i = 1,2,\ldots\ldots, n$$

$$X_0 = X_0$$ **الشرط الحدي**

$$X^* = \left[x_1^*, x_2^*\ldots\ldots\ldots x_n^*\right] \qquad ;\rightarrow x \in X \subset R^n$$
$$U^* = \left[u_1^*, u_2^*,\ldots\ldots\ldots u_n^*\right] \qquad ;\rightarrow u \in U \subset R^M$$

إذ أن:

$F(\bullet), q(x(T)), f(\bullet)$: دوال قابله للاشتقاق.

$q(x(T))$: في معظم المسائل تساوي صفراً لان معظم المسائل لا تتضمن الحالة النهائية($x(T)$) أي أنها غير مقيدة عند نهاية الفترة .

x: متغير حالة : المتغير الذي يقوم بوصف حالة النظام في أية لحظه من الزمن.

u: متغير سيطرة :هو المتغير المختار لإيجاد القيمة المثلى له لتحقيق الامثلية.

R^n: متجه الأعداد الحقيقية ذو n من الأبعاد لمتغيرات الحالة.

R^M: متجه الأعداد الحقيقية ذو M من الأبعاد لمتغيرات السيطرة.

ولحل هكذا نموذج وإيجاد القيم المثلى (الإستراتيجية) لكل متغير حالة وسيطرة تستخدم الدالة الهاميليتنية Hamiltonian Function المكونة من الجزء المراد تكاملهُ من دالة الهدف مضافاً إليها قيد مضروب في لاكرانج λ (t) أو ما يسمى متغير الحالة.

فبعد الحصول على الدالة الهاميليتنية (H) نستخدم مبدأ التعظيم Maximum Principal أو ما يسمى Portryagin. ولتكوين الدالة H

$$H(X(t),U(t),\lambda(t),t)=F(X(t),U(t),t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \; f_i(X(t),U(t),t)$$

٣ - مبدأ التعظيم Pontryagin [6][13] :

هو عبارة عن مجموعة من الشروط الضرورية التي تجعل دالة الهدف في حالة تعظيم،فلو كانت دالة الهدف تحتوي على المتغيرات X(t), U(t) فعند تعظيم هذه الدالة يجب إيجاد القيم العظمىX(t), U(t) التي تجعل دالة الهدف أعظم مايمكن. وهذه الشروط هي:

1) $\dfrac{dH}{dU(t)}=0$

2) $\lambda^{\bullet}(t)=-\dfrac{dH}{dX(t)}$

$X^{\bullet}(t)=\dfrac{dH}{d\lambda(t)}$

3) $\lim\limits_{t\to\infty}\left[\lambda(t)\,X(T)\right]\geq 0 \Rightarrow \textit{the transeversality Condition}$ الشرط القيدي

إن الشروط الكافية هي أن تكون الدالة الهاميليتنية محدبة convex في X و U. وبعد تطبيق الشروط الضرورية سيتم الحصول على مجموعة من المعادلات التفاضلية، ومن خلال حل هذه المعادلات تحليلياً Exact solution (يدوياً) نحصل على الاستراتيجيات المثلى، أو بحلها بأحد الطرائق العددية Numerical Methods يتم الحصول على القيم المثلى.

٤ - التمثيل الرياضي لنموذج أمثلي ديناميكي غير محدد الفترة[6][10]:

إذا كانت فترة التكامل للنموذج غير محددة فان دالة الهدف في النموذج تضرب بعامل الخصم e^{-rt} الذي يجعل قيم دالة الهدف محددة، حيث r تمثل مقدار الخطأ الناتج من اختيار تحديد الفترة.

$$Max \int_{t_0}^{\infty} e^{-rt} F(x(t),u(t),t)\ dt + q(x(T))$$

$$S.T$$

$$\dot{X}_i = f_i(x(t),u(t),t) \qquad i=1,\dots\dots\dots,n;$$

$$X(t_0)=X_0$$ **الشرط الحدي(الابتدائي)**

ولتكوين الدالة الهاملتينية H.

$$H(X(t),U(t),\lambda(t),t) = e^{-rt}\ F(X(t),U(t),t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ f_i(X_t,U_t,t)$$

ولإيجاد قيم المتغيرات يستخدم مبدأ التعظيم لـPortryagin أو ما يسمى بالشروط الأولية للمبدأ First order Conditions .

$$1)\ \frac{dH(.)}{dU} = 0$$

$$2)\ \dot{\lambda}_i(t) = r\lambda_i - \frac{dH(.)}{dX_i}$$

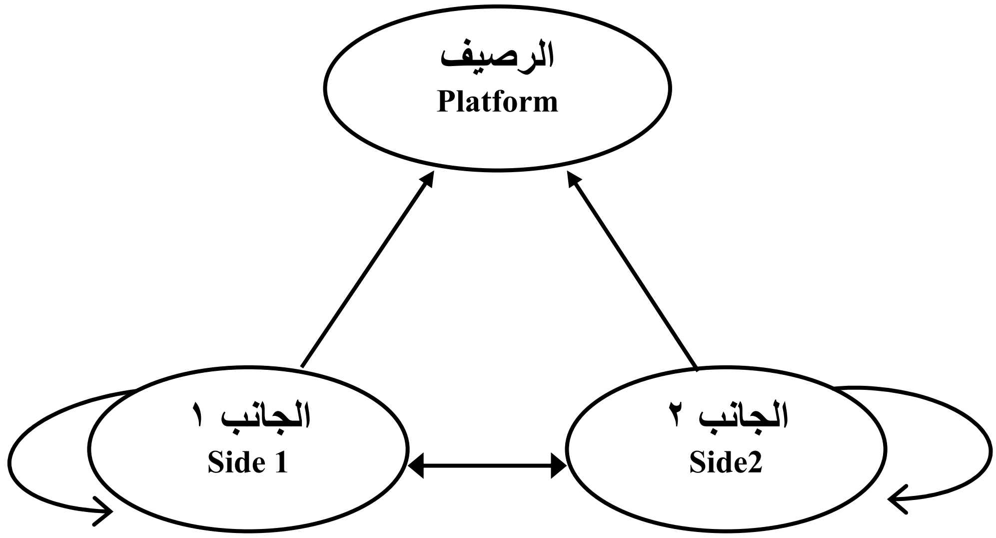
$$\dot{X}_i = \frac{dH(.)}{d\lambda_i}$$

وبعد تطبيق الشروط يتم الحصول على مجموعة من المعادلات التفاضلية وبحلها يتم الحصول على القيم المثلى.

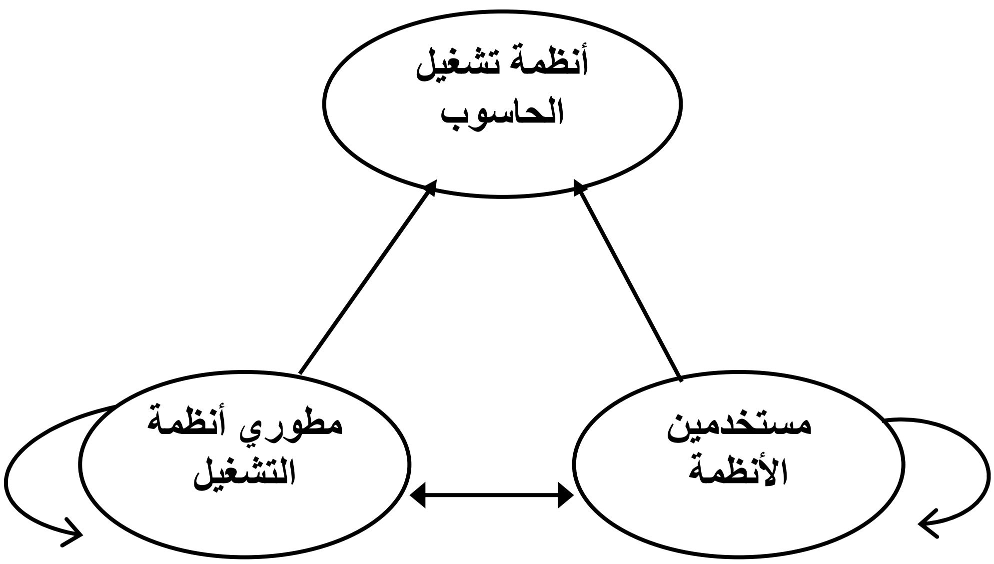
٥- أسواق ذوات جانبين Two Sided Markets

أن مفهوم الأسواق ذوات الجانبين، أو ما تسمى شبكات ذوات جانبين توضح على أنها شبكات اقتصادية مكونة من مجموعتين متميزتين تزود بعضهما البعض من منـافع الـشبكة وبعبارة أخرى هما مجموعتان من العملاء تتفاعلان مع بعضهما البعض عن طريـق شـبكة تسويقية (رصيف) وقيمة المشاركة في الشبكة لإحدى المجموعتين تعتمد على عدد المشاركين في المجموعة الأخرى.كما موضح في الشكل (١)، مثال ذلك رصيف أنظمة تشغيل الحاسوب PC والتي يشتمل جانبين احدهما مستخدمي البرامج واما الجانب الآخر فهو مطوري بـرامج التشغيل كما موضح في الشكل (٢) ، كذلك خدمات حجز السفر (مسافرون وشركات سـفر)، ألعاب الفيديو (لاعبـون ومطـوري اللعبـة)، وشـبكات الاتـصال كالإنترنيـت (كميـات مسحوبة،كميات مرسلة) فضلا عن بطاقات الائتمان (مستهلكون، تجار) إذ أن المستهلكين على سبيل المثال يفضلون البطاقات المتوفرة عند معظم التجار، بينما يفـضل التجـار البطاقـات المحمولة من قبل معظم المستهلكين.

مما تقدم فان لكل جانب دالة طلب خاصة به تمثل إحدى جوانب الشبكة، عليه يمكـن الاستنتاج من ذلك انه إذا كان المشاركون غير متجانسين في الشبكة الواحدة عندئذٍ يقال الشبكة ذات جانبين، أي أنها ذات مجموعتين، أما إذا كان المشاركون متجانسين فيقال للشبكة إنهـا ذات جانب واحد One-Sided Network مثال ذلك شبكة الهاتف المحمول إذ أن المشاركين متجانسون في الأداء يستقبلون الرسائل ويرسلوها في أوقات مختلفة وعلى نفس الخط يمكـنهم الاتصال واستقبال المكالمات وهذا يعني أنهم متجانسون في الأداء وهـذا مـا يميـزهم عـن الشبكات ذوات الجانبين، علماً بأن هكذا نوع من الشبكات تمثل أسواق احتكارية لإنفراد الشبكة تقريبا بأخذ حصة السوقً بالكامل ففي الأسواق العراقية يلاحظ أن نظام التشغيل المنتج مـن قبل شركة مايكروسوفت Windows قد أخذ تقريباً حصة السوق بالكامل.



الشكل (١): شبكة ذات جانبين



الشكل (٢): شبكة أنظمة تشغيل الحاسوب

٦- مفاهيم خاصة بالشبكة ذات جانبين[11][15][16]:

هناك بعض المفاهيم والمصطلحات الخاصة بالشبكة ذات الجانبين يمكـن إيجازهـا بالاتي:

١) الرصيف Platform: هو المكان الذي يعرض فيه المنتوج مثل رصيف PC.

٢) شبكة التأثير المتبادل Cross-Network effect: هي حالة تأثير الجـانبين أحـدهما على الآخر، أي أعداد المشاركين في أحد الجانبين يؤثر على أعداد المـشاركين فـي الجانب الآخر.

٣) شبكة التأثير المستقلة Same-Network effect: هي حالة استقلالية الجـانبين فـي التأثير كلٌ على الأخر، أي أعداد المشاركين في أحد الجوانب مـستقل عـن أعـداد المشاركين في الآخر، أي اعتماد الجانب على نفسه فقط.

٤) العميل ذو الاختيار الوحيد Single-homing agent : يقتصر هذا المفهـوم علـى المستوى الفردي للمشاركين إذ يقال للمشترك بأنه ذو اختيار وحيد إذا اشـترك بأحـد الأرصفة، مثال ذلك إذا كان المشترك يستخدم أنظمـة تـشغيل الحاسـوب لـشركة مايكروسوفت نظام التشغيل Windows فقط، أو إذا كان لدى المشترك بطاقة ائتمان لشركة واحدة مثل VISA أو MasterCard.

٥) العميل ذو الاختيار المتعدد Multi-homing agent :و يقتصر هذا المفهوم أيـضاً على المستوى الفردي إذ يقال للمشترك بأنه ذو اختيار متعدد في حالة اشتراكه بـأكثر من رصيف مبيعات، مثال على ذلك إذا كان للمشترك بطاقات ائتمان لأكثر من شبكة مـثلاً America Express و VISA و MasterCard و Discover. أو انـه يستخدم نظامي تشغيل ويندوز Windows وماكنتوش Macintosh فان النظام الأول هو لشركة مايكروسوفت Microsoft والنظام الثـاني هـو لـشركة Apple أي أن المشترك ذو اختيار متعدد Multi-homing Network.

٦) الضامن (الراعي) لرصيف الشبكة Network Platform Sponser

يعرف الضامن على انه مجموعة من الأشخاص المسؤولين عـن التحـديث وتـصليح الشبكة مثال ذلك شركتي مايكروسوفت وأبل للحاسوب هما الضامنين لأنظمة التشغيل PC في السوق لكل من Windows وMacintosh على التوالي.

٧- بناء نموذج احتكاري ديناميكي أمثلي لشبكة إنترنيت جامعة الموصل.

من خلال المفاهيم العامة والخاصة للشبكة ذات الجـانبين Two-Sided Network فقد تم اعتبار شبكة انترنيت جامعة الموصل بأنها شبكة ذات جانبين ،إذ يمثل الجانـب الأول الكمية المسحوبة Download من البيانات من قبل المشتركين اما الجانب الثاني فانـه يمثـل الكمية المرسلة Upload من البيانات من قبل المشتركين وعلى هذا الأساس تم إيجـاد دالـة طلب لكل جانب .

إن شبكات الانترنيت لايمكن اعتبارها شبكة ذات جانب واحد كمـا فـي شـبكات الاتصال لأنه عند استخدام شبكات الاتصال فانه لايمكن إيجاد دالة الطلب للمكالمات المستلمة، ويمكن إيجاد دالة طلب للمكالمات التي اجريت من قبل المشترك . وسبب ذلك يعود إلـى أن دالة الطلب قائمة على أساس السياسة التسعيرية (الأسعار) أي عند استلام المكالمات لاتوجد سياسة تسعيرية لتلك المكالمات المستلمة لذا لايمكن تمثيل دالة الطلب لها، امـا فـي حالـة المكالمات من قبل المشترك فهناك سياسة تسعريه لتلك المكالمات، أي انه يمكن إيجـاد دالـة طلب واحدة فقط للمشترك وهذا هو سبب تسميتها بشبكه ذات جانب واحد . اما فـي حالـة شبكات الانترنيـت فـان هنـاك سياسـة تـسعيرية عنـد سـحب كميـة مـن البيانـات (صوره،ملف،محادثة....الخ) هناك أيضا سياسة تسعيرية عند إرسال كميه من البيانات، وعادةً مات قاس هذه البيانات تقاس بوحدة يطلق عليها تسمية الميكا وهناك وحدة اصغر منهـا هـي كيلو بايت . لذا سيكون لدينا دالتي طلب كل داله منهما تمثل جانب ، كما أن هناك تفاعلاً بين هاذين الجانبين لذا سوف يطلق على الشبكة ذات الجانبين تسمية الشبكة ذات التأثير المتبـادل Cross-Effect Network

ولتوضيح سير عمل النموذج فان :

X: تمثل الطلب الفعلي Actual Demand للجانب الأول(الكمية المسحوبة).

Y: تمثل الطلب الفعلي Actual Demand للجانب الثاني (الكمية المرسلة).

D^x: تمثل الطلب الاحتمالي Potential Demand للجانب الأول (الكمية المعروضة من قبل رصيف Platform انترنيت الجامعة).

D^y: تمثل الطلب الاحتمالي للجانب الثاني (الكمية المعروضة من قبل الرصيف Platform).

و للحصول على دوال الطلب لكل جانب عندما يكون هناك تأثير متبادل بين الكميـه المسحوبة والكمية المرسلة Cross-Network effect فإن هذه الدوال تحقق الشروط التالية:

$$D^x = f(y, px) \qquad \frac{dD^x}{dy} > 0 \qquad \frac{dD^x}{dpx} < 0$$

$$D^y = f(x, py) \qquad \frac{dD^y}{dX} > 0 \qquad \frac{dD^y}{dpy} < 0$$

ومن خلال ملاحظة البيانات في الجدول (١)التي تم الحصول عليها من مركز الحاسبة الالكترونية التابع لجامعة الموصل بخصوص الكمية المسحوبة والمرسلة من قبل المـشتركين، إذ اخذت عينه ذات حجم ٥٠ مشتركاً من ١٨٠ مشتركاً ويمكن توضيح الرموز الموجودة في الحقول العلوية للجدول كالآتي:

T : تمثل أيام الشهر .

N.P (Number Participants) : عدد المشتركين المتواجدين في الشبكة خلال اليوم من اصل عينه ذات حجم ٥٠ مشترك .

DxDy: الكميه الاحتمالية (المعروضة) والمساوية إلى ٢٢٢٥ ميكا متوافرة لكل فرد شـهريا وبتقسيم هذه الكميه على عدد أيام الشهر الخامس وهي (٣١) يوماً لان البيانات تم أخذها لهـذا الشهر من سنة ٢٠٠٩، يتم الحصول على الكمية اليومية وهي مساوية إلى ٧٣ ميكـا يوميـا وهذه الكميه مقررة من قبل مركز انترنيت الجامعة.

X: مجموع الكميات المسحوبة من قبل المشتركين المتواجدين خلال اليوم.

Y: مجموع الكميات المرسلة من قبل المشتركين المتواجدين خلال اليوم.

Px, Py : سعر الميكا الواحدة من الكميه المسحوبة والمرسلة مقاسه بالسنت .

الجدول (١): كميات وأسعار الميكات المسحوبة والمرسلة من قبل المشتركين

T	N.P	Dx,Dy	X(t)	Y(t)	$\sqrt{X}$	$\sqrt{Y}$
1	11	803	649	99	25.4755	9.9499
2	14	1022	1007	159	31.7333	12.6095
3	43	3139	3361	320	57.9741	17.8885
4	42	3066	3052	1122	55.2449	33.4963
5	18	1314	1084	374	32.9242	19.3391
6	34	2482	1144	260	33.8231	16.1245
7	42	3066	3041	366	55.1453	19.1311
8	24	1752	1220	398	34.9285	19.9499
9	24	1752	1221	1198	34.9428	34.6121
10	39	2847	2963	306	54.4334	17.4929
11	39	2847	1228	990	35.0428	31.4643
12	41	2993	2688	378	51.8459	19.4422
13	40	2920	2623	949	51.2152	30.8058
14	40	2920	2500	326	50.0000	18.0555
15	19	1387	1362	1028	35.5246	32.0624
16	30	2190	1601	588	38.7427	24.2487
17	30	2190	1547	1065	39.3319	32.6343
18	23	1679	1575	938	39.6863	30.6268
19	38	2774	2460	564	49.5984	23.7487
20	40	2920	2412	991	49.1121	31.4802
21	33	2409	2300	1007	47.9583	31.7333
22	37	2701	2231	1201	47.2335	34.6554
23	35	2555	1641	1300	40.5093	36.0555
24	31	2263	1710	1287	41.3521	35.8748
25	29	2117	2103	900	45.8585	30.0000
26	35	2555	2047	334	45.2438	18.2757
27	27	1971	1731	577	41.6053	24.0208
28	38	2774	1739	987	41.7013	31.4166
29	28	2044	2030	809	45.0555	28.4429
30	37	2701	1771	878	43.2551	29.6311
31	37	2701	1776	410	43.3128	20.2485

إن الأسعار $P^2_y(t)$ =$P^2_x(t)$ في حالة اتزان وقيمتها مساوية ٤ سنت لكل ميكا

ولأجل تكوين دالة طلب لكل جانب فان هناك عدة طرق إما بتكوين مجموعة مـن دوال الطلب واختيار أفضل معامل تحديد مصححR2-adj او عن طريق الرسم البياني للبيانات، لذا فكانت الدالة الجذرية هي أفضل دالة متكونة لأنها تعطي أفضل معامل تحديد مصحح R2-adj مقارنة مع معامل التحديد المصحح لكل من الدالة الخطية واللوغارتمية والعكسية إلى أخره من الدوال.

فضلاً عن إن الدالة الجذرية هي دالة عامة تستخدم دائما مع الـزمن وذلـك لان دوال الطلب مع الزمن تأخذ شكل دالة محدبة او مقعرة، لذا يستخدم باحثو علم الاقتصاد هذه الدالـة مع الزمن كونها خاصة بالشبكات ذوات الجانبين و يعزون ذلك إلى ان الطلب يتبع دورة حياة المنتج أي ان المنتج يمر بعدة مراحل إلى ان يستقر وهذه المراحـل هـي التقـويم والنمـو والنضوج والانحدار.

وعليه فان دالة الطلب للجانب الأول (الكمية المسحوبة)هي:

$$D^x = b_1\sqrt{Y(t)} - d_1 P_x^{\,2}(t) \qquad ...(1)$$

$b_1 = 64.9$, $d_1 = 114$

ودالة الطلب للجانب الثاني (الكمية المرسلة)هي:

$$D^y = b_2\sqrt{X(t)} - d_2 P_y^{\,2}(t) \qquad ...(2)$$

$b_2 = 17.3$, $d_2 =$ - 4٤7

إذ أن:

PY،Px: تمثل سعر الميكا الواحدة المستخدمة(المرسلة والمـسحوبة)، وعلـى افتـراض أن الأسعار غير خطية على اعتبار أن هناك انخفاضاً حاداً في سعر الميكا وزيادةً فـي الطلـب فان الشكل اللاخطي يجنب الوقوع في مسالة فقدان الحل[9] لان عند اشتقاق الدالـة D^x D^y الهاميليتنيه بالنسبة للأسعار حسب مبدأ التعظيم فان الدالة ستكون مساوية للصفر بمعنـى إذا كانت الدالة خطية فان معادلة التسعير ستكون مساوية للصفر.

d1،d2: معلمتي حساسية السعر (تأثير السعر على الطلب).

b1، b2: معلمتي جودة خدمة الشبكة(تأثير الكميات المرسلة والمسحوبة على الطلب).

إن الدوال أعلاه غير مشبعة وللحصول على حالة الإشباع لشبكة التـأثير المتبـادل Cross-Network effect فإن:-

$$\frac{d^2 D^x}{dy^2} < o$$

$$\frac{d^2 D^y}{dx^2} < o$$

وعليه فان قيود الحالة لنموذج السيطرة هي:

$$\dot{X} = \alpha (D^x - X)$$
$$\dot{Y} = \beta (D^y - Y)$$

إذ ان:

$\dot{X}, \dot{Y}$: سرعة الانتشار diffusion speed أي سرعة دوال الطلب للوصـول إلـى حالـة التشبع، والتي تمثل حالة الاتزان للشبكة.

فإذا كانت دالة الطلب الاحتمالية Potential Demand (D^x, D^y) أكبر مـن دالـة الطلب الفعلية actual Demand (X,Y) فهذا يعني إن هناك زيادة في كمية الطلب بمعـدل (α,β) أما إذا كان الطلب الاحتمالي (D^x, D^y) أقل من الطلب الفعلي (X, Y) فهذا يعنـي أن هناك نقصاً في الكمية المعروضة بمعدل (α,β) (عدم تلبية حاجة المـشتركين مـن الكميـة المسحوبة والمرسلة) ما يؤدي إلى توقف الشبكة عن الاستخدام، وفي حالـة تـساوي الطلـب الاحتمالي مع الطلب الفعلي $D^x = X$ و $D^y = Y$ فهذا يعني أن الشبكة في حالة الاتزان، أي أن هناك عملية تشبع في الشبكة لأن $D^x - X = o$ أي أن سرعة الانتشار مساوية للصفر وهـذه الحالة تحصل مع مرور الزمن ثم تبدأ سرعة الانتشار بالتناقص أي أن دوال سرعة الانتـشار تتقعر(concave).

$$\alpha = \frac{\sum_{t=t_0}^{T}(D^x - x/D^x)}{T} \qquad \alpha = 0.216911 \qquad ...(3)$$

$$\beta = \frac{\sum_{t=t_0}^{T}(D^y - y/D^y)}{T} \qquad \beta = 0.81457 \qquad ...(4)$$

وإن دالة الهدف لتعظيم الربح عند الزمن t هي $\pi(t)$

$$\pi(t) = X(t)(Px(t) - Cx) + Y(t)(Py - Cy)$$

إذ أن:

Cx,Cy: كلفة الميكا الواحدة.

X(t), Y(t):الكمية المسحوبة والمرسلة من الشبكة.

وعليه فان نموذج السيطرة الامثل للشبكة الاحتكارية ذات الجانبين هو:

$$\underset{Px,Py}{Max} \int_{o}^{\infty} e^{-rt} \left[X(t)(Px - Cx) + Y(t)(Py - Cy) \right] dt$$

$S.t$

$$(1) \quad \dot{X} = \alpha \left[b_1 \sqrt{Y(t)} + d_1 P_x^2 - X(t) \right] \qquad ...(5)$$

$$(2) \quad \dot{Y} = \beta \left[b_2 \sqrt{X(t)} - d_1 P_y^2 - Y(t) \right] \qquad ...(6)$$

$$X_{(0)} = X_0 \qquad , \qquad Y_{(0)} = Y_0$$

X_0 = القيمة البدائية للكمية المسحوبة عند البدء

Y_0= القيمة البدائية للكمية المرسلة عند البدء

ولحل مثل هكذا مسائل يتم تكوين الدالة الهاميليتنية Hamiltonian Function الآتية:

$$H = \left[X(t)(Px - Cx) + Y(t)(Py - Cy) \right] + M_1 \alpha \left[b_1 \sqrt{y} - d_1 P_x^2 - X \right] + M_2 \beta \left[b_2 \sqrt{X} - d_2 P_y^2 - Y \right]$$

ولإيجاد القيم المثلى لكل من متغيرات السيطرة $Py(t), Px(t)$ ومتغيرات الحالـة X(t) وY(t) تتبع شروط مبدأ التعظيم Pontragian

(1) $$\frac{dH}{dPx} = X + M_1 \alpha (-2 d_1 Px) = 0$$

$$Px(t) = \frac{X(t)}{2 M_1 d_1 \alpha} \qquad ...(7)$$

(2) $$\frac{dH}{dPy} = Y + M_2 \beta (-2 d_2 Py) = 0$$

$$Py(t) = \frac{Y(t)}{2 M_2 d_2 \beta} \qquad ...(8)$$

(3) $$\dot{M}_1 = rM_1 - \frac{dH}{dx} = M_1 (r + \alpha) - Px - Cx - \frac{M_2 \beta b_2}{2\sqrt{X(t)}} \qquad ...(9)$$

(4) $$\dot{M}_2 = rM_2 - \frac{dH}{dy} = M_2 (r + \beta) - Py - Cy - \frac{M_1 \alpha b_1}{2\sqrt{Y(t)}} \qquad ...(10)$$

(5) $$\lim_{t \to \infty} e^{-rt} M_1(t) = 0, \qquad \lim_{1 \to 0} e^{-rt} M_2(t) = 0 \qquad \text{القيدي} \qquad \text{الشرط}$$

وبتعويض المعادلتين اللتين تم الحصول عليهما من (٧) و(٨) في المعـادلات (٥)،(٦)،(٩)، (١٠) يتم الحصول على نظام من المعادلات التي تسمى بمسائل القيمتين الحديتين Two

Point Boundary Value Problem وهي معادلات تفاضلية لا خطية غير متجانـسة[7]:

$$\dot{X} = \alpha\left[b_1\sqrt{Y(t)} - d_1\left(\frac{X(t)}{2M_1 d_2 \alpha}\right)^2 - X(t)\right] \quad ...(11)$$

$$\dot{Y} = \beta\left[b_2\sqrt{X(t)} - d_2\left(\frac{Y(t)}{2M_2 d_1 \beta}\right)^2 - Y(t)\right] \quad ...(12)$$

$$\dot{M}_1 = M_1(r+\alpha) - \left(\frac{X(t)}{2M_1 d_1 \alpha}\right) + Cx - \frac{M_2 \beta b_2}{2\sqrt{X(t)}} \quad ...(13)$$

$$\dot{M}_2 = M_2(r+\beta) - \left(\frac{Y(t)}{2M_2 d_2 \beta}\right) + Cy - \frac{M_1 \alpha b_1}{2\sqrt{X(t)}} \quad ...(14)$$

وبحل المعادلات [(١١)-(١٤)] يتم الحصول على القيم المثلى لكـل مـن الكميـة المثلـى المسحوبة X^* المستخدمة من قبل المشترك ، والكمية المثلى المرسلة Y^* المستخدمة من قبـل المشترك ، وبعد إيجاد القيم المثلى لكل من y , x تعوض في معادلات التسعير (٧) و(٨) ويتم الحصول على الأسعار المثالية للشبكة لكل جانب. وبما أن سعر الميكا ثابت فـان ذلـك السعر يعبر عن حالة الاتزان .

ولصعوبة حل هكذا نظام ديناميكي من المعادلات يدوياً، تم استخدام خوارزمية رانـج كوتا Runge-Kutta العددية لحلها،وبرمجة هذه الخوارزميـة باسـتخدام النظـام الجـاهز Matlab.

وبعد حل المعادلات التفاضلية [(11)-(14)] لنموذج السيطرة الامثل الناتج عن تطبيق مبدأ التعظيم تم إعطاء قيم أولية للمعلمات وللثوابت استنادا إلى البيانات.

إذ كانت:

١. القيمة البدائية للكميات المسحوبة $x_0 = 100$

٢.القيمة البدائية للكميات المرسلة $y_0 = 100$

٣.والقيم البدائية لمتغيرات لاكرانج M_2, M_1 والتي تمثل مقادير التغير الحاصـل فـي دالـة الهدف نتيجة لتغير قيد الحالة وحدة واحدة وتم حساب القيمة الأولية لـ M_1 (وهي تمثل مقدار التغير في الربح نتيجة لتغير الكمية المرسلة X وحدة واحدة) من المعادلة(٧) كالأتي:

$$M_1(0)=\frac{X(0)}{\alpha * d_1 * p_x(0)}=\frac{100}{0.2*114*2}=1.9$$

وتم حساب M_2 (وهي تمثل مقدار التغير في الربح نتيجة لتغير الكميـة المرسـلة y وحـدة واحدة) من المعادلة (٨) كالأتي:

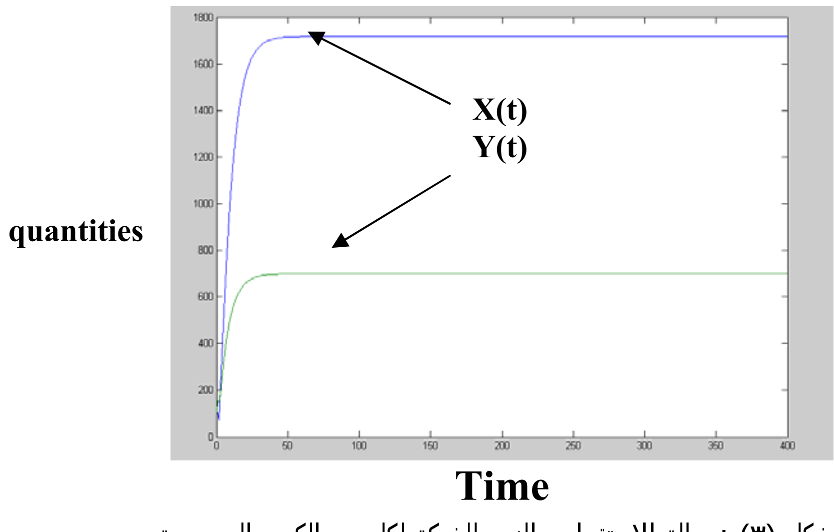
$$M_2(0)=\frac{Y(0)}{\mathrm{B} * d_2 * p_y(0)}=\frac{100}{0.8*447*2}=1.8$$

٤.افتراض قيم لكل من مقدار الخطأ r=0.5 والكلفة لكل جانب C1,C2=1 لكلا الجانبين.

٥.اما $\alpha,\beta,d_1,d_2,b_1,b_2$ تم حسابهم من البيانات.

وبعد تنفيذ البرنامج الخاص بخوارزمية رانج كوتا باستخدام النظام الجـاهز matlab كانـت النتائج كالآتي:-

١. أظهرت نتائج المحاكاة العددية وصول الشبكة الاحتكاريـة إلـى حالـة الاسـتقرار (Steady State) على المدى الطويل وتعزى حالة الاستقرار هذه إلى وصـول دوال الطلب إلى حالة التشبع، وبما انه لم يتم التشبع عند الفترة التي تم اختيار البيانات منها وهي ٣١ يوماً فهذا يعني أن الشبكة في حالة نمو إلى حين الوصول إلى حالة التشبع (الاستقرار) والتي ظهرت في الشكل (٣) إذ أن حالة الاستقرار تكـون عنـد اليـوم الـ ٥٠ تقريبا لكلا الجانبين .



الشكل (٣) : حالة الاستقرار والنمو للشبكة لكل من الكميه المسحوبة
(تمثل الخط الأزرق) والمرسلة (تمثل الخط الأخضر)

٢. يتبين من الشكل (٣) أن القيم المثلى التي تعطي حالة الاستقرار (التوازن) لكل جانب من جانبي الشبكة هي بالنسبة للكمية المثالية المسحوبة هي $X^* = 1762$ والكميـة المثالية المرسلة هي $Y^* = 721$

٣. كما تم ذكره سابقا فان الكميه الاحتمالية لشركة انترنيت الجامعة هـي ٢٢٢٥ ميكـا خلال ٣١ يوما، ولكن الدراسة أظهرت أن الكمية التي يجب توفيرها لكل مشترك خلال ٣١ يوما هي ٢٤٢٣ ميكا والناتجة من جمع القيمة المثالية التقريبية للكميـة المحـسوبة x*=1708 والقيمة المثالية التقريبية للكمية المرسلة y*=714 عند اليوم ٣١.

٨- الاستنتاجات Conclusions

على ضوء النتائج تم التوصل إلى الاستنتاجات التالية:

١- الكميات المثالية التقريبية الناتجة من حل نموذج السيطرة الأمثل للشبكة الاحتكارية ذات جانبين لكل من الكميات المسحوبة والمرسلة عند اليوم (التكرار) ٣١ تمثل متوسط الكميات الفعلية (المستخدمة) اليومية لشهر أيار لكل من الكمية المسحوبة والمرسلة .

٢- الكمية التي يجب توفيرها لكل مشترك خلال الشهر هي ٢٤٢٣ميكا بدلا من ٢٢٢٥ ميكا الشهر

٣- تتحقق حالة الاتزان عندما تكون الكمية الواجب توفيرها للمشترك هي ٢٤٢٣ ميكا وليس ٢٢٢٥ ميكا.

المصادر

١- جاتيرجي، سامبلريت، برايس، بيرترام. (١٩٨٩) : " **تحليل الانحدار بالأمثلة**" ترجمة محمد مناجد عيفان الدليمي، مطبعة التعليم العالي، الموصل، العراق.

٢- حميدات، وليد محمود، هادي، عقيل، عثامنة، عبد الباسط عبد الله. (١٩٩٨) : "**مبادئ الاقتصاد الرياضي**" مؤسسة حمادة و دار الكندي، اربد، الأردن.

٣- السعدي، مناتي صالح. (١٩٧٩) : "**تقدير دوال الطلـب وتوقعاتـه لـبعض الـسلع الاستهلاكية في العراق للفترة ١٩٨٠-١٩٨٥**" ، رسالة ماجستير في الاقتصاد، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة المستنصرية، العراق.

٤- كاظم، أموري هادي، مسلم، باسم شليبه. (٢٠٠٢) : "**القيـاس الاقتـصادي المتقـدم النظرية والتطبيق**"، دار الكتب والوثائق، بغداد، العراق.

٥- وصولوسكي، جورج. (١٩٩٠) : "**الانحدار المتعدد وتحليل التباين**"، ترجمـة شـلال حبيب الجبوري، مطبعة التعليم العالي، الموصل، العراق.

6- Geering, Hans P. (2007) "**Optimal Control With Engineering Applications**", Springer-varlag Berlin Heidelberg, New York.

7- Iacus, Stafano M. (2008) "**Simnlation And Inference For Stochastic Differential Equations**",Springer Science +Business Media,LLC,New York.

8- Kirk, Donald E, (1970) "**Optimal control theory**", prentice- Hall, Inc, Newjercy.

9- Naik, Prasad A., Winer, Russel S., And Raman, Kalyan, (2005), "**Planning Marketing-Mix Strategies In The Presence Of Intteraction Effects**", Marketing Science, Vol. 24, No. 1, ISSN 0732-2399, PP. 25-34.

10-Rubart, Jens, (2003) " **Dynamic Optimization**", Institute Of Economics, Darmstadt University Of Technology, Germany.

11- Sum, Mingchum, And Tse, Edison, (2007) "**When Does The Winner Take All In Two-Sided Markets?**", Review Of Network Economics, Vol. 6, Hong Kong.

12- Tomlin, Claire J. (2005). "**Lecture In Optimal Control And Dynamic Games**", Notes 8. For The course AA278A, Advanced Topics In Control Theory, University Of California, Berkeley.

13- Yeung, Daid. W.K, Petrosyan, Leon A. (2006), "**Cooperative Stochastic Differential Games**", Springs Science+Business Media Inc,New York.

14- http://www.esi2.us.es/mbibao/game2002.html

15- http://en.wikipedia.org/wiki/two-sided market

16- http://en.wikipedia.org/wiki/economic

17- http://university.arabsbook.com