

تنبؤ كركنك الشامل للعملية العشوائية المكانية غير المستقرة

د. أسماء غانم محمود

مدرس

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

قسم الإحصاء والمعلوماتية

د. محمد نذير إسماعيل قاسم

أستاذ مساعد

كلية التربية

قسم الرياضيات

الملخص

العمليات العشوائية المكانية على الأغلب تقسم إلى عمليات عشوائية مكانية مستقرة وأخرى غير مستقرة، وفي معظم التطبيقات العملية عادة تكون العمليات العشوائية غير مستقرة. وعند التنبؤ عن النوع الثاني يكون بواسطة تقنية تعرف بـ كركنك الشامل Universal Kriging الذي يفترض أن العملية العشوائية المكانية $\{Z(x), x \in D\}$ لها اتجاه في الزيادة أو النقصان محدد بعملية قد تكون خطية أو غير خطية.

في هذا العمل تم اشتقاق معادلات كركنك الشامل بصيغة المصفوفات ووضع نظام المعادلات الكلية بصيغة يسهل برمجتها، كذلك تم تحديد النموذج الرياضي للاتجاه بواسطة أسلوب الانحدار. ثم التطبيق على بيانات حقيقية لمثال وكانت نتائج التنبؤ قريبة من البيانات الحقيقية مع حساب خطأ التنبؤ.

Universal Kriging Prediction of Spatial Stochastic Process nonstationary

Abstract

Spatial Stochastic processes are often divided into two types that are stationary spatial stochastic processes and other nonstationary.

In most practical applications the processes are nonstationary. Prediction of these processes are performed by universal Kriging technique which supposes the process have a trend with fixed linear or nonlinear equation.

In this work we derive the universal Kriging equations in matrixes form which can easily be implemented by computer. Also here we identify the variogram model and trend model.

The application is given in example that worked out on real data. The predicted results are very near to the real data with error of prediction is given

1-1 تنبؤ كركنك الشامل Universal Kriging Prediction

في معادلات كركنك كافة المقدمّة في الفصل الثاني، يفترض أن الدالة العشوائية المكانية $Z(x)$ مستقرة Stationary وأن التنبؤ لأي $Z(x_0)$ غير معلوم من بيانات $Z(x_i)$ التي تمت الإشارة إليها بأنها Ordinary Kriging، أي أنها تنبؤ كركنك الاعتيادي ولكن في بعض التطبيقات العملية، وتلقائياً يقسم السطح $Z(x)$ إلى الاتجاه Trend والتذبذبات العشوائية Fluctuation فهناك العديد من المواقع تكون معلومة الاتجاه Drift (أو Trend)، أي أنه توقع عدم الاستقرارية $E[Z(x)] = \mu(x)$ يكون موجوداً Exists ضمن مساحات من المنطقة قيد الدراسة فعلى سبيل المثال، الزيادة في درجة عمق الذهب في اتجاه مصدره أكثر من أي منطقة أخرى، وكذلك الزيادة في عمق النهر أو البحر عند مواقع مختلفة من حافة النهر أو البحر واتجاهها إلى مسافات أبعد عن الحافة أو شاطئ البحر.

إن صفة " Universal " أي(شامل)، أول من بدأ باستخدامها G. Matheron عام 1969 لتشير إلى عدم التحيز في التنبؤ عندما يكون الاتجاه Drift تركيباً خطياً غير معلوم لدوال معلومة Unknown Linear Combination، حيث قام بعرض تفاصيل كركنك الشامل باللغة الفرنسية ثم تبعته ترجمة قصيرة بالانكليزية أنظر: (Huijbregts and Matheron, 1970) ولقد كتب آخرون حول الموضوع نفسه، أنظر: (Olea, 1974) و (Delfiner, 1976) و (David, 1977) و (Delhomme, 1978) و (Davis, 1986) و (Isaaks, 1989) و (Stein, 1999) و (Webster, 2001) و (Venables, 2002) و (Diggle, et al, 2003).

ولازالت البحوث إلى حد الآن تتناول موضوع كركنك الشامل.

2-1 صيغة الاتجاه: - The Form of the Drift

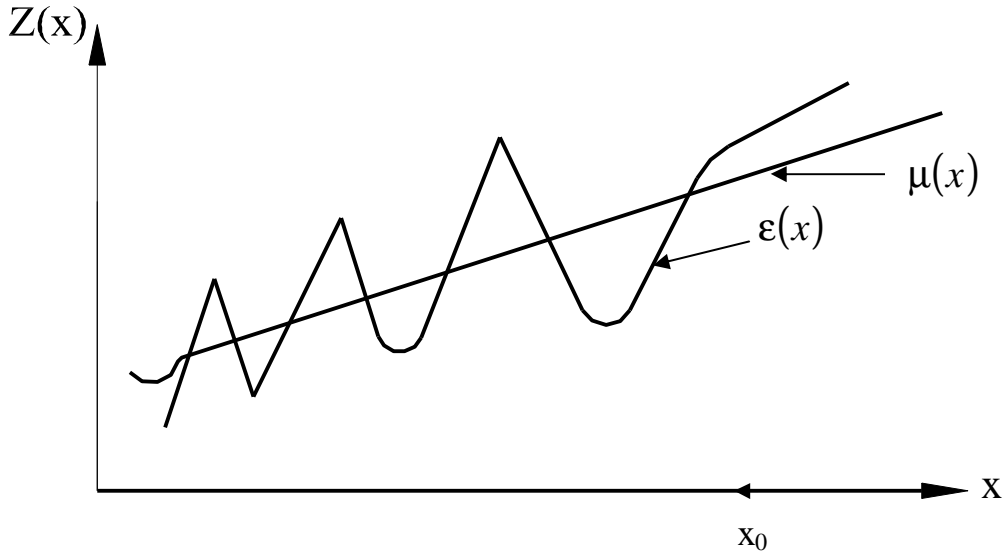
إن طريقة Universal Kriging تعطي تنبؤاً خطياً غير متحيز Unbiased Linear Predictor، وتأخذ بنظر الاعتبار الاتجاه أي أن:

$$E[Z(x)] = \mu(x) \quad \forall x \in D \quad \dots(1)$$

بشكل عام $Z(x)$ دالة عشوائية مكانية غير مستقرة في المنطقة قيد الدراسة وبواسطة تعريف الاتجاه من المعادلة (1) فإن نموذج الدالة العشوائية المكانية غير المستقرة $Z(x)$ يمكن أن يعبر عنه كالآتي:-

$$Z(x) = \mu(x) + \varepsilon(x) \quad \dots(2)$$

الاتجاه $\mu(x)$ والذي يعبر عن الاختلاف المستمر والمنتظم في الدالة العشوائية المكانية $Z(x)$ عند قياس المشاهدات للبيانات التجريبية، وأن $\varepsilon(x)$ يعبر عن التذبذبات العشوائية حول الاتجاه، أنظر الشكل (1).



الشكل رقم (1): الاتجاه $\mu(x)$ والتذبذبات $\varepsilon(x)$.

من الشكل نلاحظ أنه ليس هناك فرق واضح بين الاتجاه $\mu(x)$ والتذبذبات العشوائية. وبصورة عامة فإن $\mu(x)$ يمكن اعتباره اختلاف المقياس الكبير Large-Scale Variation، واعتبار التذبذبات العشوائية $\varepsilon(x)$ عملية عشوائية صغيرة المقياس Small-Scale Variation Process. أنظر: (Ripley, 1981)، (Journel and Huijbregts, 1978).

3-1 معادلات كرنك الشامل: - Universal- Kriging Equations

إن نظرية التنبؤ لـ Winer- Kolomogrov تم تطويرها واستخدمت بصورة رئيسة من قبل G. Matheron ومدرسته في الدراسات الجيولوجية على العمليات المكانية، أنظر: (Davis, 2002)، ويكون التناظر مفيداً مع تحليل السلاسل الزمنية في عزل الاتجاه Drift، والذي يعتبر هدفاً من أهداف التحليل، وكذلك في وصف التوزيع للدالة العشوائية $\varepsilon(x)$. وهنا تكمن أهمية تحليل المعادلة (2) والتنبؤ بالمكونتين كل على حدا، انظر: (Jurgen Symanzik, 2000). ولغرض صياغة نموذج خطي عام General Linear Model في الإحصاء المكاني، انظر: (Papritz, 1999)،

نعتبر العملية العشوائية المكانية $Z(x)$ المعرف في منطقة المنطلق Domain Region-D والتي هي مجموعة جزئية من فضاء أقليدس R^3, R^2 ($D \subset R^2, R^3$) كالآتي:-

$$Z(x) = f'(x)B + \varepsilon(x), \quad \forall x \in D \quad \dots(3)$$

إذ إن:-

x : تمثل الموقع في R^2 أو R^3 .

$Z(x)$: عملية عشوائية مكانية.

$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]'$: متجه معلوم من الاحداثيات.

β : متجه بسعة r من المعلمات المجهولة.

$\varepsilon(x)$: متجه عشوائي بتوقع صفر وتباين موجود Exists.

الحد $\beta f'(x)$ في المعادلة (3) يمثل توقع العملية العشوائية المكانية ونقصد بالعملية العشوائية المكانية هنا هي تلك الظاهرة قيد الدراسة كما بينا سابقاً، كالتقيب عن المعادن أو المياه الجوفية.....الخ من الدراسات الجيولوجية.

إن العملية العشوائية المكانية $Z(x)$ تحقق الفرضيات الآتية:-

الفرضية (1):-

$$E[Z(x)] = f'(x)\beta \quad \dots(4)$$

الفرضية (2):-

$$E[Z(x+h) - Z(x)]^2 = 2\gamma(h) \quad \forall x, x+h \in D \quad \dots(5)$$

ويكون $2\gamma(h)$ احادي الخواص Isotropic أي يعتمد فقط على المسافة h .

الفرضية (3):-

دالة التغاير موجودة ومعرفة كالآتي:-

$$Cov[Z(x), Z(x+h)] = C(h) \quad \forall x, x+h \in D \quad \dots(6)$$

نفترض أن لدينا n من المشاهدات المعلومة هي:

$$Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)$$

عند المواقع

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

عندئذ يمكن كتابة النموذج (3) بلغة المصفوفات و كالآتي:-

$$Z = F\beta + \varepsilon \quad \dots(7)$$

إذ إن :-

$$\begin{aligned} Z &= [Z(x_1), \dots, Z(x_n)] \text{ : متجه بسعة } n \text{ من المشاهدات.} \\ F &= [f(x_1), \dots, f(x_n)] \text{ : مصفوفة معلومة بسعة } (n \times r). \\ \beta &= [\beta_1, \dots, \beta_r] \text{ : متجه بسعة } r \text{ من المعلمات المجهولة.} \\ \varepsilon &= [\varepsilon(x_1), \dots, \varepsilon(x_n)] \text{ : متجه الأخطاء العشوائية بسعة } n. \end{aligned}$$

ولغرض تمهيد Smoothing السطح المنتبأ به نستخدم المعادلة:

$$\tilde{Z}(x) = \hat{\mu}(x) \quad \dots(8)$$

ولغرض التنبؤ بموقع جديد x_0 داخل المنطقة قيد الدراسة (الفضاء D) والتي تدعى بـ Interpolation نستخدم المعادلة الآتية :-

$$\hat{Z}(x) = \hat{\mu}(x) + \hat{\varepsilon}(x) \quad \dots(9)$$

ولدراسة التنبؤ الشامل Universal Kriging لابد من تقسيم هذه الفقرة إلى ثلاثة محاور، المحور الأول يتناول تقدير الاتجاه $\hat{\mu}(x)$ فقط مع افتراض تباين العملية العشوائية المكانية $\varepsilon(x)$ معلوم Known. إن معرفة التباين تكون حرجة في كثير من الدراسات العملية والتي يكون فيها التباين غير معلوم Unknown، وعليه يتناول المحور الثاني معلومية الاتجاه $\mu(x)$ وعدم معلومية $\varepsilon(x)$ ، فنقوم بتقدير التباين. أما المحور الثالث فيتناول عدم معرفة الاتجاه $\mu(x)$ و $\varepsilon(x)$ معاً، حيث نقوم بالوقت نفسه بتقدير الاتجاه $\hat{\mu}(x)$ والتباين $\hat{\varepsilon}(x)$ ، انظر : (Cressie, 1993)، (Papritz, 1999). وهكذا سنتناول هذه المحاور بالتفصيل وكما يأتي :-

1-4 تقدير الاتجاه :- Estimation of Trend

في حالة أن الاتجاه $\mu(x)$ يكون غير معلوم Unknown نفترض أن $\varepsilon(x)$ معلوم ، وهذا يعني :-

$$\left. \begin{aligned} Var[Z] &= Var[\varepsilon] = \Sigma \\ Cov[Z, Z_i] &= C(x) \end{aligned} \right\} \quad \dots(10)$$

وحسب الفرضية (1) لدينا:

$$E[Z(x)] = \mu(x) = f'(x)B \quad \dots(11)$$

حيث $f(x)$ معلومة ولا تحتوي على معلمات مجهولة ، فمثلاً عندما يكون سطح الاتجاه خطياً Linear Trend Surface فإن $f(x)$ تكون كالتالي:

$$f(x) = (1, u, v)$$

وعندما يكون السطح الاتجاه تربيعياً Quadratic Surface فإن $f(x)$ تكون كالاتي:

$$f(x) = (1, u, v, u^2, v^2, uv)$$

ولتقدير $\hat{\mu}(x)$ ، باستخدام طريقة المربعات الصغرى العامة Generalized least Squares نحصل على تقدير معاملات النموذج المكاني الخطي العام، فإذا كان النموذج المفترض في المعادلة (7) هو:-

$$Z = F\beta + \varepsilon$$

فإن مجموع مربعات الخطأ يكون كالاتي:-

$$(Z - F\beta)' \Sigma^{-1} (Z - F\beta) \quad \dots(12)$$

أنظر : (Wackernagel, 1998)

ولإيجاد تقدير لقيم β التي تجعل (12) أقل ما يمكن، نأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة لـ β ثم نجعلها تساوي صفراً فنحصل على \hat{b} التقديرية:-

$$\hat{\beta} = AF'\Sigma^{-1}Z \quad \dots(13)$$

إذ أن:-

$$A = (F'\Sigma^{-1}F)^{-1}$$

وهذا التقدير هو أفضل تقدير خطي غير متحيز (BLUE) ولغرض الحصول على $\hat{\mu}(x)$ ، المقدرّة وكالاتي:-

$$\hat{\mu}(x) = f'(x)\hat{\beta} \quad \dots(14)$$

نعوض (13) في (14) نحصل على:-

$$\hat{\mu}(x) = f'(x)AF'\Sigma^{-1}Z \quad \dots(15)$$

الآن نفترض المنتبأ الخطي الآتي:-

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu}(x) &= \mathbf{1}'_1 Z \\ \hat{\mu}(x) &= Z\mathbf{1}_1 \end{aligned} \right\} \quad \dots(16)$$

إذ إن:-

$$\mathbf{1}_1 = \Sigma^{-1}FAf(x) \quad \dots(17)$$

حيث: $\mathbf{1}_1$ - متجه بسعة n يمثل الأوزان المرافقة للمشاهدات المكانية $Z(x_i)$ وهذه الأوزان تناظر λ في تنبؤ كركنك الاعتيادي أنظر (محمود، 2006).
لاحظ أن مصفوفة التغير لـ \hat{b} هي:-

$$Var(\hat{\beta}) = A \quad \dots(18) \quad *$$

وأن تباين $\hat{\mu}(x)$

$$Var(\hat{\mu}(x)) = f'(x)Var(\hat{\beta})f(x) \\ = f'(x)Af(x) \quad \dots(19) \quad *$$

5-1 التنبؤ الخطي مع اتجاه معلوم: - Linear Prediction with Known Trend

نفترض أن الاتجاه $\mu(x)$ معلوم للعملية العشوائية المكانية وأن $\varepsilon(x)$ غير معلومة في المعادلة (2)

وللسهولة ولكي نقدر $\varepsilon(x)$ نفترض أن:-

$$\varepsilon(x) = w(x)$$

إذن سيكون:-

$$w(x) = Z(x) - \mu(x) \quad \dots(20)$$

نحاول تقدير $w(x)$ وذلك بافتراض المتنبأ الخطي الآتي:-

$$\hat{w}(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{2i} w(x_i) \quad \dots(21)$$

وبلغة المصفوفات:-

$$\left. \begin{aligned} \hat{w}(x) &= \mathbf{1}'_2 w(x) \\ \hat{w}(x) &= w'(x) \mathbf{1}_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots(22)$$

إذ إن:-

$w(x) = [w(x_1), w(x_2), \dots, w(x_n)]'$
ويمثل متجه الأخطاء العشوائية ذا سعة n .

$$\mathbf{1}_2 = [\mathbf{1}_{21}, \mathbf{1}_{22}, \dots, \mathbf{1}_{2n}]'$$

ويمثل متجه الأوزان ذا سعة n .

ولدينا:-

$$var[w(x)] = \Sigma \quad , \quad Cov[w(x), w] = C(x) \quad \dots(23)$$

المتنبأ في المعادلة (22) هو متنبأ خطي Linear Predictor بأقل متوسط مربع خطأ وكالاتي:-

$$E[w(x) - \hat{w}(x)]^2 = Var[w(x) - \hat{w}(x)] \\ = Var[w(x)] + Var[\hat{w}(x)] - 2Cov[w(x), \hat{w}(x)] \quad \dots(24)$$

وبتعويض (22) و (23) في (24) نحصل على:-

$$= Var[w(x)] + Var[\mathbf{I}'_2 w(x)] - 2Cov[w(x), \mathbf{I}'_2 w(x)] \\ = Var[w(x)] + \mathbf{I}'_2 var[w(x)] \mathbf{1}_2 - 2Cov\left[w(x), \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{2i} w(x_i)\right] \quad \dots(25)$$

وبتعويض (23) في (25) نحصل على:-

$$= Var[w(x)] + \mathbf{I}'_2 \sum \mathbf{1}_2 - 2 \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{2i} Cov[w(x), w(x_i)] \\ = Var[w(x)] + \mathbf{I}'_2 \sum \mathbf{1}_2 - 2\mathbf{I}'_2 C(x)$$

إذن:

$$E[w(x) - \hat{w}(x)]^2 = C_{00} + \mathbf{I}'_2 \sum \mathbf{1}_2 - 2\mathbf{I}'_2 C(x) \quad \dots(26)$$

الآن نعتبر (26) معادلة ذات صيغة تربيعية، ولغرض تصغيرها نشق بالنسبة لـ $\mathbf{1}_2$ ونساوي المعادلة بالصفر نحصل على:-

$$\sum \mathbf{1}_2 = C(x) \quad \dots(27)$$

وبضرب طرفي المعادلة في (27) بـ \sum^{-1} نحصل على:-

$$\mathbf{1}_2 = \sum^{-1} C(x) \quad \dots(28)$$

حيث إن \sum تمثل مصفوفة التغاير وهي مصفوفة غير أحادية Non-Singular ، أكيدة الايجابية كما هو معلوم.

وبتعويض (28) في (22) يصبح المتنبأ كالاتي:-

$$\hat{w}(x) = w'(x) \sum^{-1} C(x) \quad \dots(29)$$

إن المعادلة (29) تعتبر التنبؤ الأمثل Optimal Prediction لـ $w(x)$ لأنها ذات أقل متوسط مربع خطأ Minimum Mean Square Error.

إن تباين خطأ التقدير للمتنبأ $\hat{w}(x)$ هو :-

$$\begin{aligned}\sigma_E^2 \hat{w}(x) &= \min E[w(x) - \hat{w}(x)]^2 \\ &= \text{Var}[Z(x)] - \mathbf{I}'_2 C(x) \quad \dots(30) \quad *\end{aligned}$$

Full Model

6-1 النموذج الكامل :-

نفترض الآن أن كلا المكونين، الاتجاه $\mu(x)$ والأخطاء العشوائية $\varepsilon(x)$ غير معلومين Unknown في العملية العشوائية المكانية (2)، ولغرض إيجاد المتنبأ الخطي $\hat{Z}(x)$ ، سيكون بواسطة الطريقة المناظرة في عمليات السلاسل الزمنية وهي ربط بين المحورين الأول والثاني لتكوين المتنبأ الخطي الآتي :-

$$\hat{Z}(x) = \hat{\mu}(x) + \hat{w}(x)$$

وهذا يتم بـ :-

(أولاً): توفيق الاتجاه $\hat{\mu}(x)$ من المعادلة (16) :

$$\hat{\mu}(x) = Z \mathbf{1}_1$$

(ثانياً): تكوين المعادلة الآتية :-

$$W = Z - \hat{\mu} \quad \dots(31)$$

ومن الفرضية (1) لدينا :-

$$E[Z(x)] = \mu(x) = f'(x) \beta$$

وبلغة المصفوفات:

$$E[Z] = \mu = F \beta \quad \dots(32)$$

$$\hat{\mu} = F \hat{\beta} \quad \dots(33)$$

بتعويض $\hat{\beta}$ من المعادلة (13) في (33) نحصل على :-

$$= F A F' \sum^{-1} Z$$

$$= Z \sum^{-1} F A F' \quad \dots(34)$$

(ثالثاً): التنبؤ بـ $w(x)$ كما لو أن الاتجاه $\mu(x)$ معلوم Known وهذا يعني:

$$\hat{w}(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{2i} w(x_i) \quad \dots(35)$$

وبلغة المصفوفات:

$$\hat{w}(x) = \mathbf{I}'_2 w \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} = w' \mathbf{1}_2 \quad \dots(36)$$

وبتعويض (31) و (28) في (36) نحصل على:

$$\hat{w}(x) = (Z - \hat{\mu})' \Sigma^{-1} C(x)$$

وبتعويض (33) في المعادلة أعلاه نحصل على:

$$= (Z' - \hat{\beta}' F') \Sigma^{-1} C(x)$$

وبتعويض عن قيمة $\hat{\beta}$ في المعادلة أعلاه نحصل على:-

$$\hat{w}(x) = Z \mathbf{1}_2^*$$

إذن:

$$\hat{w}(x) = \mathbf{I}_2^* Z \quad \dots(37)$$

إن \mathbf{I}_2^* سنجد صيغتها لاحقاً.

وللحصول على خواص هذا المتنبأ، لدينا من المعادلة (11) الآتي:-

$$E[Z(x)] = \mu(x) = f'(x)B$$

نفترض أن $\hat{Z}(x)$ هو متنبأ خطي وكالاتي:-

$$\hat{Z}(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{3i} Z(x_i) \quad \dots(38)$$

وبلغة المصفوفات:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{Z}(x) = \mathbf{I}'_3 Z \\ \hat{Z}(x) = Z \mathbf{1}_3 \end{array} \right\} \quad \dots(39)$$

$$E[\hat{Z}(x)] = \mathbf{I}'_3 E[Z] \quad \dots(40)$$

وبتعويض (32) في (40) نحصل على:-

$$E[\hat{Z}(x)] = \mathbf{I}'_3 F \beta \quad \dots(41)$$

ولكي يكون :

$$E[\hat{Z}(x)] = \mu(x)$$

أي غير متحيز، فقط إذا:-

$$\mathbf{I}'_3 F = f'(x) \quad \dots(42)$$

أي أن (38) هو متنبأ خطي غير متحيز. عندئذ فإن متوسط مربع الخطأ يكون كالاتي:-

$$\begin{aligned} E[Z(x) - \hat{Z}(x)]^2 &= \text{Var}[Z(x) - \hat{Z}(x)] \\ &= \text{Var}[Z(x)] - 2\mathbf{I}'_3 C(x) + \mathbf{I}'_3 \Sigma \mathbf{I}_3 \end{aligned} \quad \dots(43)$$

ولتقليل (43) وفقاً للقيود (42) تكون دالة لاكرانج كالاتي:-

$$S = \text{Var}[Z(x)] - 2\mathbf{I}'_3 C(x) + \mathbf{I}'_3 \Sigma \mathbf{I}_3 + 2(f'(x) - \mathbf{I}'_3 F) \lambda$$

حيث I تمثل مضاعف لاكرانج.

نشتق المعادلة أعلاه بالنسبة إلى \mathbf{I}_3 ونساوي الناتج بالصفر نحصل على:-

$$\mathbf{I}_3 = \Sigma^{-1} C(x) + \Sigma^{-1} F \lambda$$

نعوض \mathbf{I}_3 في (42) ينتج:-

$$\lambda = A \left[f(x) - F' \Sigma^{-1} C(x) \right]$$

نعوض I في \mathbf{I}_3 نحصل على:-

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_3 &= \Sigma^{-1} C(x) + \Sigma^{-1} F \left[A (f(x) - F' \Sigma^{-1} C(x)) \right] \\ &= \Sigma^{-1} C(x) + \Sigma^{-1} F \left[A f(x) - A F' \Sigma^{-1} C(x) \right] \\ &= \Sigma^{-1} C(x) + \Sigma^{-1} F A f(x) - \Sigma^{-1} F A F' \Sigma^{-1} C(x) \\ &= \Sigma^{-1} F A f(x) + (I - \Sigma^{-1} F A F') \Sigma^{-1} C(x) \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2^* \quad \dots(44)$$

إذ إن:-

$$\mathbf{I}_1 = \Sigma^{-1} F A f(x)$$

$$\mathbf{I}_2^* = (I - \Sigma^{-1} F A F') \Sigma^{-1} C(x)$$

وبتعويض (44) في (39) نحصل على:-

$$\begin{aligned} \hat{Z}(x) &= (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2^*) Z \\ \hat{Z}(x) &= \mathbf{I}'_1 Z + \mathbf{I}_2^* Z \end{aligned}$$

إذن إن:

$$\hat{Z}(x) = \hat{\mu}(x) + \hat{w}(x) \quad \dots(45)$$

إن تباين الخطأ للمتنبأ الخطي $\hat{Z}(x)$ يكون كالآتي:-

$$\sigma_E^2(\hat{Z}(x)) = [Var(Z(x)) - C'(x)\Sigma^{-1}C(x)] +$$

$$[f(x) - F'\Sigma^{-1}C(x)] A [f(x) - F'\Sigma^{-1}C(x)] \quad \dots(46)$$

إن الحد الأول للمعادلة (46) هو $Var(\hat{w}(x))$ المتمثل في المعادلة (30)، ولكن الحد الثاني هو ليس $Var[\hat{\mu}(x)] = f'(x)Af(x)$ المتمثل في المعادلة (19) حيث تم تعديل قيمة الوسط $\hat{m}(x) = f'(x)\hat{b}$ إلى $[f'(x) - \mathbf{1}_2' F] b$ ، حيث $\mathbf{1}_2'$ هو متجه الأوزان المستخدم في صياغة $\hat{w}(x)$.

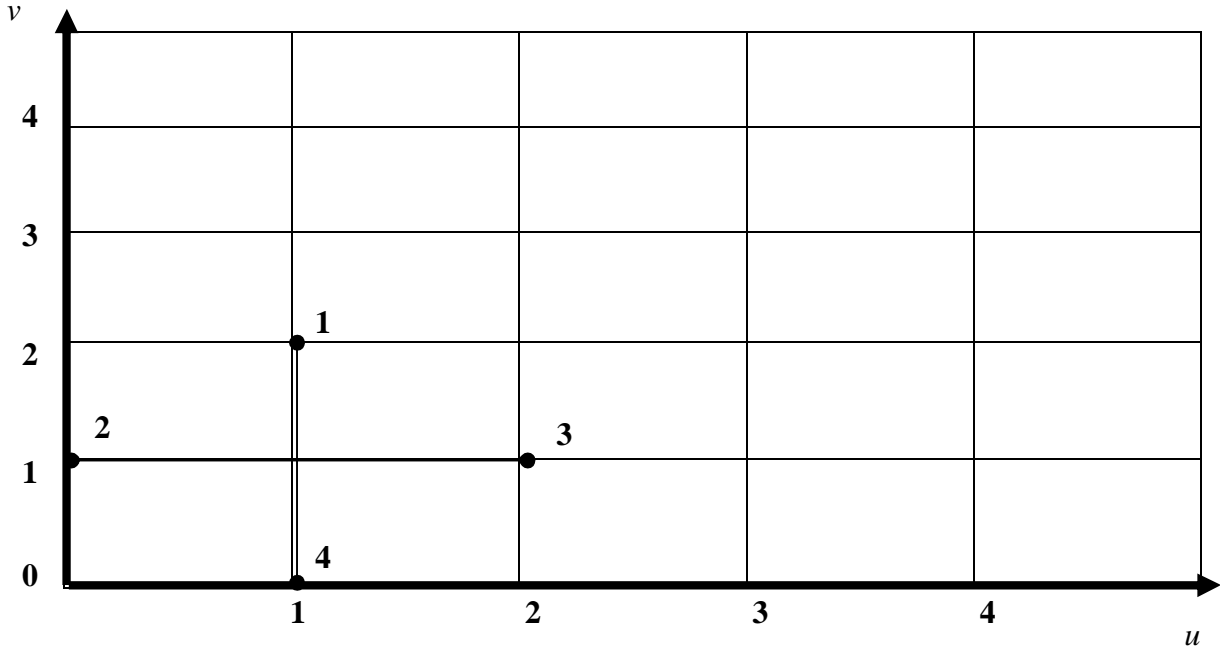
إذا كانت $f(x)$ مجرد ثابت فإن $\hat{Z}(x)$ و $\sigma_E^2(\hat{Z}(x))$ هما إجراء G. Matheron الذي أطلق عليها اسم Kriging، في هذه الحالة فإن شرط عدم التحيز يتمثل بـ أن مجموع الأوزان $\sum z_i$ يساوي واحداً وتدعى هذه الحالة العامة بـ "كركنك الشامل" أنظر: (Ripley, 1981).

1-7 مثال تطبيقي

البيانات في الجدول رقم (1) والتي اخذت من الشكل (2) انظر (Cressie,1993) تمثل درجات معدن الالمنيوم ومواقعها التي تم الحصول عليها من الصخور Bauxite اثناء الحفر بانتظام في فضاء معين، حيث قيست وحدات المسافة بين مواقع الحفر بوحدة القدم Feet والمطلوب الحصول على تنبؤات بدرجات معدن الالمنيوم الحقيقية من الصخور باستخدام تنبؤ كركنك الشامل.

جدول (1) درجات معدن الالمنيوم ومواقعها

	$Z(x_i)$	u	v
1	2.54	1	2
2	2.4	0	1
3	2.25	2	1
4	2.29	1	0



الشكل (2): مواقع معدن الألمنيوم

نفترض الاتجاه Trend له المعادلة الخطية الآتية:

$$m(u, v) = b_1 + b_2u + b_3v$$

$$f(x) = (1, u, v) = F$$

نفترض أن دالة التغيرات تتبع النموذج الآتي:

$$C(h) = \begin{cases} 0.0085(4-h) & \text{if } h < 4 \\ 0 & \text{if } h > 4 \end{cases}$$

أولاً:

يتم تقدير معالم النموذج \hat{b} من المعادلة رقم (13).

حيث ان :

$$A = (F' \sum^{-1} F)^{-1}$$

$$\therefore b = (F' \sum^{-1} F)^{-1} F' \sum^{-1} Z$$

حيث يتم إيجاد مصفوفة \sum أي دالة التغيرات حسب النموذج المفترض أعلاه وذلك بحساب مصفوفة المسافات $[h]$ من القانون الآتي:

$$h_{ij} = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2}$$

فمثلاً :

$$h_{11} = \sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2} = 0$$

$$h_{12} = \sqrt{(1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

وهكذا لبقية عناصر المصفوفة حيث نحصل على المصفوفة الآتية:

$$h = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

وهكذا نحصل على مصفوفة التغيرات \sum وكالاتي:

$$\sum = 0.0085 \left[4 - \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \right]$$

إذن ناتج مصفوفة \sum يكون كالاتي:

$$\sum = \begin{bmatrix} 0.034 & 0.021979 & 0.021979 & 0.017 \\ & 0.034 & 0.017 & 0.021979 \\ & & 0.034 & 0.021979 \\ & & & 0.034 \end{bmatrix}$$

ويتم إيجاد مصفوفة \sum^{-1} وتكون كالاتي:

$$\sum^{-1} = \begin{bmatrix} 67.548 & -32.87 & -32.87 & 8.724 \\ & 67.548 & 8.7241 & -32.87 \\ & & 67.548 & -32.87 \\ & & & 67.548 \end{bmatrix}$$

ثانياً:

يتم تكوين مصفوفة F وحساب F' كالاتي:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ثالثاً:

تكوين مصفوفة Z من البيانات الأصلية وتكون كالاتي:

$$Z = \begin{bmatrix} 2.54 \\ 2.40 \\ 2.25 \\ 2.29 \end{bmatrix}$$

وهكذا نحصل على تقديرات معالم النموذج $\hat{m}(x)$ وهي:

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.32 \\ -0.075 \\ 0.125 \end{bmatrix}$$

إن معادلة الاتجاه المقدر Trend أو $\hat{m}(x)$ عند أي موقع ذي اتجاهين تكون كالاتي:

$$\hat{m}(u, v) = 2.32 - 0.075u + 0.125v$$

إن القيم المتنبأ بها عند المواقع $(1,0)$ ، $(2,1)$ ، $(0,1)$ ، $(1,2)$ هي

2.495، 2.445، 2.295، 2.245 وعلى التوالي، وكما موضح في الجدول رقم (2) الآتي:

جدول (2): درجات معدن الألمنيوم المتنبأ بها بـ $\hat{m}(x)$

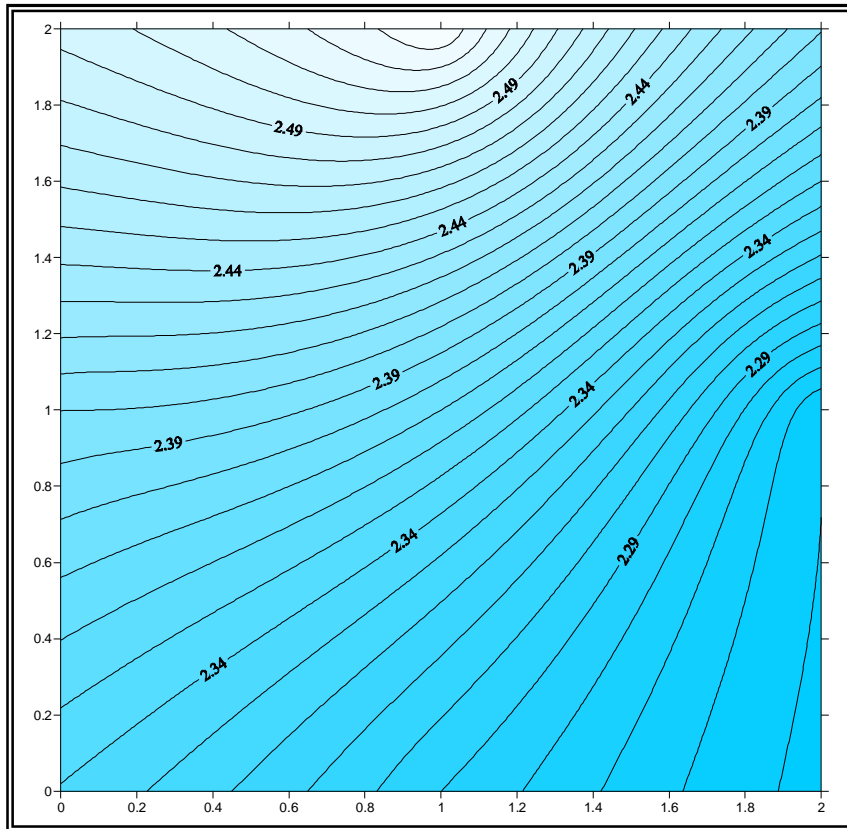
u	v	$\tilde{z}(x)$
1	2	2.495
0	1	2.445
2	1	2.295
1	0	2.245

ولغرض تمهيد السطح المتنبأ به نستخدم المعادلة (8). الآن إذا استخدمنا $\hat{m}(u, v)$ لتنبؤ

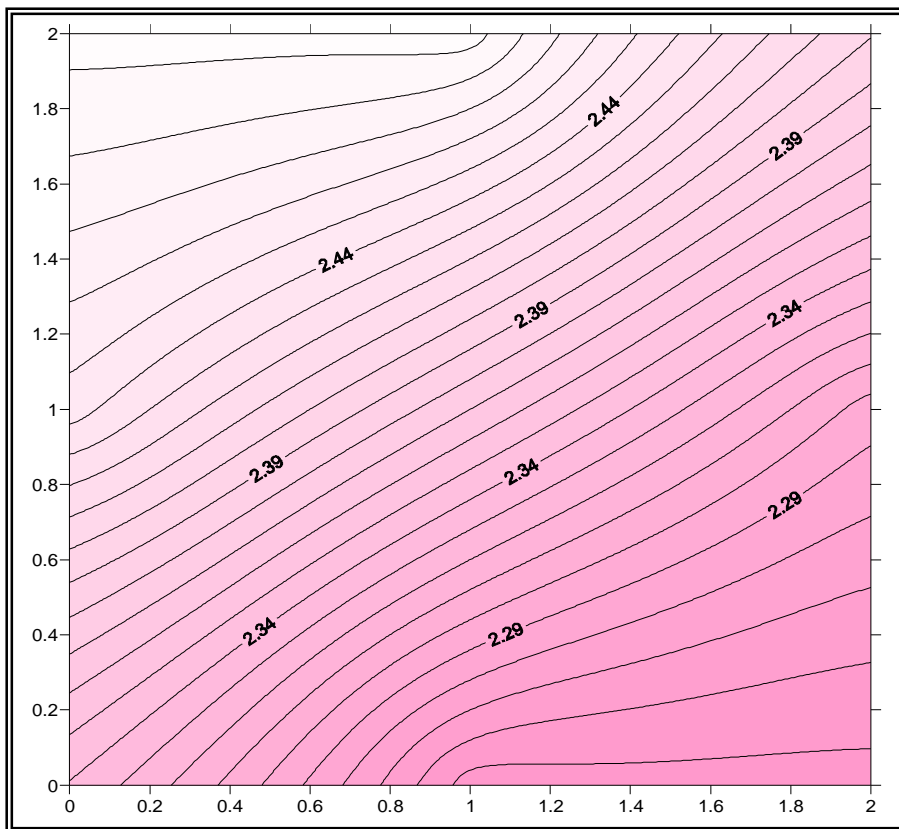
$\tilde{Z}(u, v)$ ، نلاحظ أن القيم المقدره سوف تكون قريبة جدا من معظم القيم الحقيقية كما موضح

في الجدول رقم (2) وكذلك الشكل رقم (3) والشكل رقم (4) يوضحان الرسم الكنتوري

لدرجات معدن الألمنيوم الحقيقية والمتنبأ بها على التوالي.



شكل رقم (3): الكنتور لدرجات معدن الألمنيوم الحقيقية



شكل رقم (4): الكنتور لدرجات معدن الألمنيوم المتنبأ بها

الآن بعد ان قدرنا الاتجاه $\hat{m}(x)$ ومنه تم التنبؤ بقيم $Z(x)$ بواسطة $\tilde{Z}(x)$ ، نقوم بتقدير $\hat{w}(x)$ وذلك بواسطة المعادلة الآتية:

$$\hat{w}(x) = (Z - \hat{m})' \Sigma^{-1} C(x)$$

$$u(x) = (Z - \hat{m})'$$

$$u(x) = \left[Z(x) - \hat{m}(x) \right]'$$

$$u(x) = [0.045 \quad -0.045 \quad -0.045 \quad 0.045]'$$

$$\therefore \hat{w}(x) = u(x) \Sigma^{-1} C(x)$$

وبعد الحصول على قيم المتجه $u(x)$ ومعرفة المصفوفة Σ^{-1} نقوم باستخراج قيم المتجه $C(x)$ لكل موقع من النموذج المعطى:-

$$C(x) = C(u, v) = 0.0085(4 - h)$$

فمثلا قيمة $C(x)$ عند الموقع الأول تكون كالآتي:

$$\begin{aligned} C(1,2) &= 0.0085 \left[4 - \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{14} \end{bmatrix} \right] \\ &= 0.0085 \left[4 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4142 \\ 1.4142 \\ 2 \end{bmatrix} \right] \\ &= 0.0085 \left[4 - \begin{bmatrix} 4 \\ 2.5858 \\ 2.5858 \\ 2 \end{bmatrix} \right] \\ C(1,2) &= \begin{bmatrix} 0.034 \\ 0.0219793 \\ 0.0219793 \\ 0.017 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

وهكذا يتم إيجاد $\hat{w}(x)$ للموقع الأول أي :

$$\hat{w}(1,2) = 0.045$$

وبالطريقة نفسها نجد $\hat{w}(x)$ عند الموقع (0,1) والموقع (2,1) والموقع (1,0) وتكون -0.045
 0.045,-0.045 وعلى التوالي، وكما موضح في الجدول رقم (3).

جدول (3) القيم المقدرة لـ $\hat{w}(x)$

U	V	$\hat{w}(x)$
1	2	0.045
0	1	-0.045
2	1	-0.045
1	0	0.045

وللحصول على الدرجات المتنبأ بها $\hat{Z}(x)$ يكون من المعادلة الآتية:

$$\hat{Z}(x) = \hat{m}(x) + \hat{w}(x)$$

انظر الجدول رقم (4) يوضح نتائج المثال.

جدول (4): درجات معدن الألمنيوم المتنبأ بها للنموذج الكامل

U	V	$\hat{m}(x)$	$\hat{w}(x)$	$\hat{Z}(x) = \hat{m}(x) + \hat{w}(x)$
1	2	2.495	0.045	2.54
0	1	2.445	-0.045	2.4
2	1	2.295	-0.045	2.25
1	0	2.245	0.045	2.29

نلاحظ أن درجات معدن الألمنيوم المتنبأ بها تساوي الدرجات الحقيقية لمعدن الألمنيوم في المواقع المشار إليها ومن هذا نستنتج قوة التنبؤ عند استخدام معادلات كركنك الشامل.
 ملاحظة: تم الحصول على النتائج بتطبيق البرنامج بلغة Matlab في الملحق وتم رسم الأشكال الكنتورية بواسطة البرنامج الجاهز Surfer.

الاستنتاجات

1. ان أي طريقة احصائية اعتيادية، يتم تصنيف البيانات بها ثم تمثل بواسطة الرسم البياني الاحصائي مثل Histogram لا تأخذ بنظر الاعتبار مواقع العينات Location sample في المنطقة قيد الدراسة، أي عدم قدرة الاحصائيات الاعتيادية الاخذ بنظر الاعتبار الناحية المكانية للظاهرة. فالمتغير المكاني هو دالة حقيقية تأخذ

قيمة محددة في كل نقطة (موقع) في المجال قيد الدراسة. والموقع يتمثل بالاحداثيات ثنائية او ثلاثية البعد.

2. ان اسلوب كركنك يعد اسلوب نمذجة احصائي مكاني يأخذ بنظر الاعتبار التركيب المكاني الاساسي الموجود في المعلومات المكانية ،حيث يمكن احصائياً اشتقاق التنبؤات المثلى بإعطاء افضل التقديرات غير المتحيزة Best Unbiased Estimates ، وتكون هذه التنبؤات لموقع ذات مشاهدات غير مقاسة وكذلك ايجاد قيم تنبؤية للبيانات الحقيقية والتي يمكن اعتبارها سطحاً ممهداً لتنبؤات لاحقة.

التوصيات

في التطبيق العملي ربما يكون الاتجاه Trend معروفاً أي توقع $E[z(x)]$ عدم الاستقرارية يكون موجود ضمن مواقع معينة قيد الدراسة، أي هناك تغير في الاتجاه، اذن يصبح من الضروري استخدام اسلوب كركنك الشامل Universal Kriging.

المصادر

1. محمود، اسماء غانم (2006): "اسلوب بيز في التنبؤ عن العملية العشوائية المكانية-مع تطبيق على المياه الجوفية في قضاء سنجار" اطروحة دكتوراه (غير منشورة)، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل، الموصل، العراق.
2. Cressie, N. (1993): "**Statistics for Spatial Data**", Wiley, 2nd Edition. New York.
3. Davis, J.C. (1986): "**Statistics and Data Analysis in Geology**", 2nd edition. Wiley, New York.
4. David, M. (1977): "**Geostatistical Ore Resource Estimation**", Elsevier, Amsterdam.
5. Delfiner.P. (1976): "**Linear Estimation of Nonstationary Spatial Phenomena**", In: C (Ed) Advances Geostatistics In Mining Industry Reidel, D. Publishing Co Holland, PP.(49-68).
6. Delhomme, J. P. (1978): "**Kriging in the Hydrosciences, Advances in Water Resources**", No.1, PP. (251-266).
7. Diggle,P.J.,Ribeiro Jr.,P.J.and Christensen, O. F. (2003): "**An Introduction to Model based Geostatistics. In: Spatial Statistics and Computational methods**", (ed. J. Moller), Springer Verlag, 43-86.
8. Huijbregts, Ch. And Matheron, G. (1970): "**Universal Kriging-an Optimal approach to trend Surface analysis**" in Decision-Making in the Mineral Industry, Special Volume No. 12 , CI MM Montreal, PP.159-169.

9. Isaaks, E. H. and Srivastava, R. M., (1989): "**An Introduction to Applied Geostatistics**", Oxford University Press, New York.
10. Journel, A.G. and Huijbregts, C.J. (1978): "**Mining Geostatistics**", Academic Press, London.
11. Jurgen Symanzik, (2000): "**Applied Spatial Statistics**", Utah State University.
12. Olea, R.A. (1974): "**Optimal Contour Mapping Using Universal Kriging**", Journal of Geophysical Research-, No.79, PP. (695-702).
13. Papritz, A., Stein, A.; (1999): "**Spatial Prediction by Linear Kriging Spatial Statistics for Remote Sensing**", Netherlands, PP. (83-113).
14. Ripley, B. D., (1981): "**Spatial Statistics**", Wiley, New York.
15. Stein, M.L., (1999): "**Interpolation of Spatial Data, Some Theory for Kriging**". Springer, New York.
16. Venables, W.N. and Ripley, B.D.,; (2002): "**Modern Applied Statistics**", New York: Springer-Verlag, Fourth Edition.
17. Wackernagel, H., (1998): "**Multivariate Geostatistics**", (2nd, Completely Revised Edition), Springer, Berlin, Germany.
18. Webster, R. and Oliver, M., (2001): "**Geostatistics for Environmental Scientists**", Chichester; Wiley and Sons.

الملحق

```

clc
clear;
z=[6.2 7.4 6.2 6.2 7.3 6.1 6.1 3.6 3.4 3.4 7.5 7.4 6.2 7.3 6.2 6.2 3.9 3.5 3.5
3.2 7.2 6.2 6.2 7.3 6.2 6.1 5.8 5.6 5.4 5.3 7.1 6.2 6.1 6.2 6.1 5.8 5.6 5.4
5.2 5.2 6.0 6.0 6.1 6.0 5.9 5.6 5.6 5.2 5.1 3.9 5.9 5.9 6.0 5.7 5.9 5.5 5.2
5.0 3.9 3.8 5.8 5.8 5.6 5.6 5.3 5.2 3.8 3.9 3.8 3.7 5.7 5.4 5.1 5.1 5.2 3.8
3.8 3.7 3.5 3.4 5.5 5.2 3.9 3.8 3.8 3.6 3.6 3.5 3.4 3.4 5.2 3.9 3.7 3.7 3.6
3.5 3.3 3.2 3.1 3.0];
u=[1.9;3.8;1.5;1.4;4.5;1.8;1.5;3.0;3.0;3.3;4.0;4.9;1.7;4.7;1.8;1.7;0.8;0.8;0.
8;3.2;3.0;1.7;1.5;4.5;1.7;1.5;1.3;1.1;1.2;1.4;3.2;1.6;1.8;1.8;1.8;1.1;1.5;1.3
;1.4;1.4;1.7;1.5;2.0;1.5;0.8;1.3;1.2;1.0;1.0;0.7;0.9;1.6;1.7;1.2;1.6;1.0;1.3;
1.3;0.9;0.6;1.5;1.4;1.5;1.4;1.3;1.3;0.9;0.3;0.7;0.7;1.4;1.4;1.5;1.4;1.5;0.7;0
.9;0.4;0.5;0.9;1.8;1.5;0.7;0.9;0.6;3.6;3.4;3.4;3.1;3.5;1.3;0.8;0.8;0.7;0.5;0.
6;0.9;3.4;3.2;3.1];
v=[3.7;4.3;3.7;3.9;4.4;3.8;4.0;4.0;5.1;4.9;4.5;4.2;3.5;4.0;3.4;2.9;3.1;3.3;3.
0;3.6;3.9;3.8;3.9;4.2;3.5;3.1;5.1;5.4;4.4;4.2;3.9;3.5;3.1;3.3;2.9;5.1;4.9;5.1
;5.4;4.7;2.8;3.0;3.3;3.1;4.5;4.9;5.2;4.4;4.2;3.1;4.8;4.0;4.5;5.5;4.3;5.2;4.2;
3.9;3.7;3.6;4.9;5.2;3.9;5.2;4.0;4.3;3.8;4.8;3.3;3.7;4.2;4.0;3.9;4.4;4.3;3.5;3
.9;4.1;4.5;3.1;4.6;4.3;3.1;3.0;3.1;4.0;4.7;4.7;4.2;4.6;4.4;3.5;2.9;2.6;2.9;3.
0;3.3;4.0;3.9;2.8];
z=z';
for i=1:100
    for j=1:100
        h(i,j)=sqrt((u(i)-u(j))^2+(v(i)-v(j))^2);
    end
end
% delet zeros spas%
for i=1:99
    for j=i+1:100
        if h(i,j)<=0
            u(j,1)=0;          v(j,1)=0;          z(j,1)=0;
        end
    end
end
end
k=0;
for i=1:100
    if u(i) >0

```

```

k=k+1;
u1(k,1)=u(i,1);
v1(k,1)=v(i,1);
z1(k,1)=z(i,1);
end
end
%begin the program%
clear u,v,z;
clear h;
xu=u1;
xv=v1;
z=z1;
%%%%%%%%%
for i=1:88
    for j=1:88
        h(i,j)=sqrt((xu(i)-xu(j))^2+(xv(i)-xv(j))^2);
    end
end
%%%%%%%%%
c0=0.2;
c=6.6;
a=4.25;
for i=1:88
    for j=1:88
        if h(i,j)==0
            qh(i,j)=c+c0;
        elseif h(i,j)<a
            qh(i,j)=c*(1-(3*h(i,j)/(2*a))+0.5*(h(i,j)/a)^3);
        else
            qh(i,j)=0;
        end
    end
end
end
%%%%%%%%%
qq0=c0+c;
for k=1:88
    xu0=xu(k,1);
    xv0=xv(k,1);

```

```

fg=0;
ww=qh;
for i=1:88
    if i ~ =k
        fg=fg+1;
        h0(fg)=sqrt((xu0-xu(i))^2+(xv0-xv(i))^2);
        z11(fg,1)=z(i);
    end
end
ww(:,k)=[];    ww(k,:)=[];
h0n(:,k)=h0';
j=ones(87,1);
ww=inv(ww);
clear qh0;
for i=1:87
    if h0(i)==0
        qh0(1,i)=c+c0;
    elseif h(i,j)<a
        qh0(1,i)=c*(1-(3*h0(i)/(2*a))+0.5*(h0(i)/a)^3);
    else
        qh0(i,j)=0;
    end
end
qh0n(:,k)=(qh0(1,:));
qh0=qh0';
clear yy;
yy=((1-qh0'*ww*j)/(j'*ww*j))*(ww*j)+(ww*qh0);
yyn(:,k)=yy;
%%%%%%%%%%
z00=yy'*z11;
z00n(k,1)=z00;
%%%%
qq2=qq0-qh0'*ww*qh0+((1-j'*ww*qh0)^2/(j'*ww*j));
qq2n(k,1)=qq2;
%%%
qqz=(qh0'*ww*qh0)+((1-(j'*ww*qh0)^2)/(j'*ww*j));
qqzn(k,1)=qqz;
end

```