دراسة في تقدير الإمكان الأعظم لنموذج تحليل التباين العشوائي

د. عبد الجبار شهاب البرهاوي
أستاذ مساعد
كلية علوم الحاسوب والرياضيات

زينب توفيق حامد
مدرس مساعد
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
tzaenab@yahoo.com

المستخلص

يعد تحليل التباين الأساس في تحليل الكثير من البيانات الإحصائية. ولتقدير معلمات نموذج تحليل التباين هنالك طرائق عديدة من هذه الطرائق التي تستخدم في التقدير طريقة الإمكان الأعظم، ولكن لصعوبة إيجاد حلول معادلات الإمكان والحصول على مقدرات مركبات التباين في حالة كون البيانات غير موزونة بدون استخدام طرق التكرار تم إيجاد طريقة محورة للإمكان الأعظم وباستخدام نموذج عشوائي ذي عامل واحد وعدد محدود من المستويات، ولإيجاد مقدرات مركبات التباين تم الحصول على متعدد حدود بدرجة واحدة في حالة المستويين ومتعدد حدود من الدرجة الثالثة في حالة استخدام ثلاثة مستويات وهكذا. وكذلك تم دراسة بعض خصائص هذه المقدرات.

Abstract

Analysis of variance is the best way for analyzing experiments that statistician design and it is the basic tool for many statistical data analysis.

There are many methods to estimate parameters of analysis of variance models. The difficulty of this estimation increases when the number of data in the cells are not equal. One of these methods that frequently used in estimation is the maximum likelihood method. Because of the difficulty in finding the roots of the likelihood equations when data are unbalanced a modified method have been founded. This method has been used for one-way random model in case of two levels and three levels.

مقدرات الإمكان الأعظم المحورة Modified Maximum Likelihood Estimators

دوال الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Functions

في هذا البحث يتم إيجاد مقدرات مركبات التباين لدوال إمكان أعظم محورة بدون استخدام الطرائق العددية، النموذج الذي يتم استخدامه نموذجاً عشوائيا ذا عامل واحد غير موزون ويحتوي على ثلاث مستويات وهو كالأتي:

$$y_{ij} = \mu + a_i + e_{ij} \quad , i = 1,...k ; j = 1,....n_i \qquad (1)$$

إذ إنّ μ هو الوسط الحسابي العام وهو قيمة ثابتة، وان e_{ij}, a_i متغيرات عشوائية مستقلة عن بعضها تتوزع طبيعياً بوسط قدره الصفر وتباين $\sigma_e^2\ \sigma_a^2$, على التوالي.

أما بالنسبة لتباين المشاهدة y_{ij} والتباين المشترك فهو موضح بالمعادلة الآتية كما ذكرت في (Searle, 1971) و(Sahai and Ojeda , 2005):

$$\operatorname{cov}(y_{ij}, y_{i'j'}) = \begin{cases} \sigma_e^2 + \sigma_a^2 & \text{for } i = i';\ j = j' \\ \sigma_a^2 & \text{for } i = i';\ j \neq j' \\ 0 & \text{for } i \neq i' \end{cases} \qquad (2)$$

وعليه فان مصفوفة التباين والتباين المشترك لمشاهدات المستوى i هي :

$$\left.\begin{array}{l} = \sigma_e^2 I_{n_i} + \sigma_a^2 J_{n_i} \quad = \sigma_e^2 (I_{n_i} + \gamma J_{n_i}) \\ \text{where } \gamma = \dfrac{\sigma_a^2}{\sigma_e^2}\ ; \quad J_{n_i} = 1_{n_i} 1'_{n_i} \end{array}\right] \qquad (3)$$

عندئذ فإنّ المستوى $Y_i \sim N(\mu 1, \sigma_e^2 (I_{n_i} + \gamma J_{n_i}))$ وان قيمة محدد ومعكوس مصفوفة التباين أعلاه تساوي

$$|\sigma_e^2 (I_{n_i} + \gamma J_{n_i})| = (\sigma_e^2)^{n_i} (1 + n_i \gamma)$$

$$\left(\sigma_e^2 (I_{n_i} + \gamma J_{n_i})\right)^{-1} = \frac{1}{\sigma_e^2}\left(I_{n_i} - \frac{\gamma}{1 + \gamma n_i} J_{n_i}\right)$$

Maximum Likelihood Function **دالة الإمكان الأعظم**

بما أن $Y_i \sim N(\mu 1, \sigma_e^2 (I_{n_i} + \gamma J_{n_i}))$ ولذلك فإنّ دالة الإمكان للمتغير Y_i هي كما ذكرها (Sahai and Ojeda , 2005):

$$f_i(Y_i; \mu 1, V_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n_i} |V_i|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y_i - \mu 1)' V_i^{-1} (y_i - \mu 1)\right]$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n_i} (\sigma_e^2)^{n_i} (1 + n_i \gamma)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_e^2}(y_i - \mu 1)'\left(I_{n_i} - \frac{\gamma}{1 + n_i \gamma} J_{n_i}\right)(y_i - \mu 1)\right] \qquad (4)$$

بعد أخذ الأس للدالة الأُسية وفكهُ، وفرضاً أن1= i كانت دالة الإمكان للمتغيــر Y_i بالشــكل الاتي:

$$f_1(Y_1;\mu 1, V_1) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n_1} (\sigma_e^2)^{n_1} (1+n_1\gamma)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\sum_{j=1}^{n_1}(y_{1j}-\bar{y}_{1.})^2\right.\right.$$

$$\left.\left. + (\bar{y}_{1.}-\mu)^2\left(\frac{n_1}{1+n_1\gamma}\right)\right]\right] \qquad (5)$$

أما إذا كان لدينا $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_a$ فان دالة الإمكان التي تستخدم تكون بالشكل الآتي:

$$L = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{\sum_{i=1}^{a} n_i}\left[(\sigma_e^2)^{\sum_{i=1}^{a} n_i}\prod_{i=1}^{a}(1+n_i\gamma)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2+\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{n_i}{1+n_i\gamma}\right)(\bar{y}_{i.}-\mu)^2\right]\right] \qquad (6)$$

مقدرات مركبات التباين بالطريقة المحورة

Estimators of Variance Component by using Modified Method

اولا:عندما يحتوي النموذج على مستويين (a=2)

ذُكِرت في الفقرة السابقة دالة الإمكان بشكل عام في معادلة (6) التي سيتم استخدامها في إيجاد الدالة المحورة وكالآتي:

افرض أن $w_i = \frac{n_i}{1+n_i\gamma}$ لذلك إن دالة الإمكان الأعظم لمستويين تصبح بالشكل الآتي:

$$L = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n_1+n_2}(\sigma_e^2)^{n_1+n_2}\left[(1+n_1\gamma)(1+n_2\gamma)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2+\sum_{i=1}^{2}w_i(\bar{y}_{i.}-\mu)^2\right]\right] \qquad .(7)$$

والآن بأخذ اللوغاريتم للدالة ومن ثم الاشتقاق الجزئي بالنسبة للمعلم μ ومساواة المشتقة بالصفر ينتج:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{2} w_i\bar{y}_{i.}}{\sum_{i=1}^{2} w_i} = \frac{w_1\bar{y}_1+w_2\bar{y}_2}{w_1+w_2} \qquad (8)$$

وبالتعويض عن قيمة $\hat{\mu}$ في الدالة بعد اخذ اللوغاريتم لها ينتج:

$$\ln L = -(n_1+n_2)\ln\sqrt{2\pi} - \frac{n_1+n_2}{2}\ln(\sigma_e^2) - \frac{1}{2}\ln(1+n_1\gamma) - \frac{1}{2}\ln(1+n_2\gamma) - Q$$

$$-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[w_1\left(\bar{y}_{1.} - \frac{w_1\bar{y}_{1.}+w_2\bar{y}_{2.}}{w_1+w_2}\right)^2 + w_2\left(\bar{y}_{2.} - \frac{w_1\bar{y}_{1.}+w_2\bar{y}_{2.}}{w_1+w_2}\right)^2\right] \qquad .(9)$$

$$\text{where } Q = -\frac{1}{2\sigma_e^2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2$$

بتبسيط الحد الأخير من المعادلة (9) ينتج:

$$-\frac{1}{2\sigma_e^2}\frac{w_1 w_2(\bar{y}_{1.}-\bar{y}_{2.})^2}{(w_1+w_2)} \qquad (10)$$

نلاحظ الناتج بعد التبسيط عبارة عن فرق بين وسطين $(\bar{y}_1-\bar{y}_2)$ وكذلك لو قمنا بتبسيط المقدار $\frac{1}{\sigma_e^2}\frac{w_1 w_2}{(w_1+w_2)}$ نلاحظ انه يساوي معكوس تباين الفرق بين هذين الوسطين وكالآتي:

$$V^{-1}(\bar{y}_1-\bar{y}_2) = \frac{1}{\sigma_e^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+2\gamma\right)} \qquad (11)$$

وهذا يتفق مع النتيجة المعروفة

$$(\bar{y}_{1.}-\bar{y}_{2.}) \sim N\left(0,\sigma_e^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+2\gamma\right)\right) \qquad (12)$$

من هذه النتيجة التي تم الحصول عليها يمكن القول أن دالة الإمكان الأعظم المحورة تساوي دالة الإمكان للفرق بين وسطين وكالآتي:

$$L(\bar{y}_1-\bar{y}_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_e^2}\left|\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+2\gamma\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+2\gamma\right)}(\bar{y}_1-\bar{y}_2)^2\right\} \qquad .(13)$$

وباستخدام هذه الدالة يمكن أن نشتق بالنسبة للمعلمة γ، بأخذ اللوغاريتم للدالة ومن ثم بالاشتقاق الجزئي بالنسبة للمقدر γ ومساواة النتيجة بالصفر ينتج:

$$\hat{\gamma} = \left(\frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2}{\sigma_e^2} - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right) \frac{1}{2}. \qquad .(14)$$

خصائص المقدر

احتمال أن يكون المقدر سالب

وجد في الفقرة السابقة أن $(\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{2.}) \sim N\left(0, \sigma_e^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + 2\gamma\right)\right)$. ومنها نستطيع القول أن المقدار

$$\frac{(\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{2.})^2}{\sigma_e^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + 2\gamma\right)} \sim \chi^2_{(1)}$$

ومنها يكون المقدر قيمة سالبة عندما تكون

$$F < \frac{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + 2\gamma\right)}. \qquad (15)$$

وهذا يدل انه إذا كانت F المحسوبة من جدول تحليل التباين أصغر من المقـدار الـذي علـى اليمين فإنّ المقدر يكون سالباً، نلاحظ أن هذه الاحتمالية قيمة صغيرة لأنهـا تعتمـد بصـورة كبيرة على $\frac{1}{n_i}$ وكلما كانت n_i كبيرة كلما اقترب المقدار من الصفر أي أن احتمال أن يكـون المقدر سالباً صغيراً.

القيمة المتوقعة للمقدر

يتم ايجاد القيمة المتوقعة للمقدر باسـتخدام سلسـلة تـايلور (Taylor series approximations) المذكورة في (Dobson ,2002)، تكون سلسلة تايلور بالشكل الأتي:

$$f(x, y) \cong f(\mu_1, \mu_2) + (x - \mu_1) \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\mu_1, \\ y=\mu_2}} + (y - \mu_2) \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=\mu_1, \\ y=\mu_2}}. \qquad (16)$$

اما القيمة المتوقعة لهذه الدالة فهي تساوي:

$$E\left[f(x,y)\right]=f(\mu_1,\mu_2) \qquad .(17)$$

بتشبيه قيم المقدر $\hat{\gamma}=\left(\frac{(\bar{y}_1-\bar{y}_2)^2}{\sigma_e^2}-\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)\frac{1}{2}$ بقيم المعادلة (16) كالأتي:

$$f(x,y)=\hat{\gamma}\,,\ x=(\bar{y}_{1.}-\bar{y}_{2.})^2\,,\ y=\hat{\sigma}_e^2$$

$$f(x,y)=\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)\frac{1}{2} \qquad (18)$$

وبحساب القيم المطلوبة في المعادلة (16) يمكن ايجاد سلسلة تايلور للدالة $f(x,y)$ وكذلك القيمة المتوقعة لها والتي تساوي كما ذكرت في معادلة(17) كالأتي:

$$E\left[f(x,y)\right]=f(\mu_1,\mu_2)=\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}-\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)\frac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+2\gamma-\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)\frac{1}{2}$$

$$\therefore E(\hat{\gamma})=E\left[f(x,y)\right]=\gamma \qquad (19)$$

تباين المقدر

يتم حساب قيمة تباين المقدر $\hat{\gamma}$ باستخدام سلسلة تايلور وكالآتي:

$$v\left[f(x,y)\right]=v(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}f\Big|_{\substack{x=\mu_1\\ y=\mu_2}}\right)^2+v(y)\left(\frac{\partial}{\partial y}f\Big|_{\substack{x=\mu_1\\ y=\mu_2}}\right)^2$$

$$+2\operatorname{cov}(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial x}f\Big|_{\substack{x=\mu_1\\ y=\mu_2}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}f\Big|_{\substack{x=\mu_1\\ y=\mu_2}}\right) \qquad (20)$$

باستخدام الفرضيات المذكورة في معادلة (18) كانت نتيجة التباين كالآتي:

$$v\,f(x,y) = \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+2\gamma\right)\frac{1}{4\sigma_e^2}+\frac{1}{2(N-a)}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+2\gamma\right)^2 \qquad (21)$$

Test of Hypothesis **اختبار الفرضية**

في الحالة التي لدينا لن نجد قيمة F تقريبية ولكن من الممكن أن نســتخدم احصـــاءة Z بعد أن تم إيجاد قيمة التباين للمقدر وكالاتي:

$$Z = \frac{\hat{\gamma}-\gamma_0}{\sqrt{\hat{v}(\hat{\gamma})}} \qquad .(22)$$

Confidence Interval **فترة الثقة**

$$\hat{\gamma}-Z\sqrt{\hat{v}(\hat{\gamma})} < \gamma < \hat{\gamma}+Z\sqrt{\hat{v}(\hat{\gamma})} \qquad .(23)$$

إذ أن Z هي القيمة الجدولية.

مقارنة المقدر الناتج مع مقدر تحليل التباين

يتم ذلك عن طريق مقارنة القيمة المتوقعة لكلا المقدرين وكالاتي:

القيمة المتوقعة لمقدر الإمكان الأعظم المحور باستخدام سلسلة تايلور مــن المعـــادلة (10) تساوي γ وألان نجدها لمقدر تحليل التباين بالشكل الأتي:

من المعلوم أن مقدر تحليل التباين نرمز له فرضاً $\hat{\gamma}^*$ يعرّف بالشكل الآتي:

$$\hat{\gamma}^* = \frac{MSA-MSe}{P\,MSe} \quad ;P = \left(N-\frac{\sum_{i=1}^{a} n_i^2}{N}\right)\Big/(a-1)$$

حيث أن MSe ,MSA متوسط مربعات المعاملات والخطأ على التوالي.

ولأجل حساب القيمة المتوقعة للمقدر $\hat{\gamma}^*$ نشبه قيم المقدر بقــيم المعادلـــة (16) وكــذلك حساب القيم المطلوبة بالمعادلة كالأتي:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= \hat{\gamma}^* \quad ,x = MSa \ \ ,y = MSe \\ f(x,y) &= \frac{x}{Py}-\frac{1}{P} \end{aligned}\right] \qquad (24)$$

والأن يمكن إيجاد سلسلة تايلور للدالة $f(x,y)$ وكذلك القيمة المتوقعة لها والتي تساوي كما ذكرت في معادلة (17) كالأتي

$$f(\mu_1,\mu_2)=\frac{\mu_1}{P\,\mu_2}-\frac{1}{p}$$

$$E\,f(x,y)=\frac{p\sigma_a^2+\sigma_e^2}{p\sigma_e^2}$$

$$\therefore E(\gamma^*)=E\,f(x,y)=\gamma \qquad (25)$$

نلاحظ من النتائج التي تم الحصول عليها أن القيمة المتوقعة للمقــدر النـــاتج باســـتخدام طريقة الإمكان الأعظم المحورة يساوي تقريباً القيمة المتوقعة للمقدر الناتج باستخدام طريقـــة تحليل التباين.

ثانياً: عندما يحتوي النموذج على ثلاثة مستويات (a=3)

فـــي هـــذه الحالـــة يـــتم تقـــدير مركبـــات التبـــاين باســـتخدام m-estimates أو (Maximum Likelihood Type Estimates) إذ يمكّننا من استخدام الدالة الآتيـــة الـــذكر في التقدير، وعلى هذا الأساس وباســـتخدام مصـــفوفة خاصـــة تـــدعى [Helmert Matrix] ويرمز لها بمصفوفة H يمكن تعريف دالة الإمكان الأعظم المحورة التي ستستخدم في التقدير، في حالة (a=3) تكون سعة مصفوفة H بعدد المستويات أي سعتها (3×3) وكالآتي:

$$H=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix} \qquad (26)$$

باستخدام هذه المصفوفة يمكن تعريف دالة الإمكان الأعظم المحـــورة التـــي ســـتحتوي متغيرين عشوائيين z_2,z_1 يتبعان التوزيع الطبيعي إذ إنّ:

$$z_2=\frac{\bar{y}_{1.}+\bar{y}_{2.}-2\bar{y}_{3.}}{\sqrt{6}},\ z_1=\frac{\bar{y}_{1.}-\bar{y}_{2.}}{\sqrt{2}}$$

و أن $E(z_1)=E(z_2)=0$ وتباين z_2,z_1 على التوالي:

$\sigma_e^2\left(\frac{1}{2n_1}+\frac{1}{2n_2}+\gamma\right)$, $\sigma_e^2\left(\frac{1}{6n_1}+\frac{1}{6n_2}+\frac{4}{6n_3}+\gamma\right)$ وكذلك التباين المشترك بين z_2, z_1 هو

$$Cov(z_1.z_2) = E(z_1.z_2) = E\left[\left(\frac{\bar{y}_{1.}-\bar{y}_{2.}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\bar{y}_{1.}+\bar{y}_{2.}-2\bar{y}_{3.}}{\sqrt{6}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{12}}\sigma_e^2\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)$$

نلاحظ أن المقام يحتوي على n لهذا إذا كانت n كبيرة فبالإمكان إهمال التباين المشترك وكذلك يمكن إضافته ودراسة الفرق بين الحالتين.

يتم في هذا الرسالة اعتماد حالة إهمال التباين المشترك بين z_2, z_1 أي اعتبارهما متغيرين مستقلين، ولكن يتم إلقاء الضوء بشكل بسيط على حالة وجود التباين المشترك بين المتغيرين.

أولا: في حالة إهمال التغاير (التباين المشترك)

إن دالة الإمكان الأعظم المحورة المستخدمة في حالة عدم وجود التباين المشترك هي عبارة عن حاصل ضرب دوال المتغيرين z_2, z_1 وكالآتي:

$$L=\frac{1}{(2\pi)^{2}(v_1.v_2)^{1/2}}\exp\left[\frac{z_1^2}{v_1}+\frac{z_2^2}{v_2}\right]$$

$$=\frac{1}{\sigma_e^2(2\pi)^2\left[\left(\frac{1}{2n_1}+\frac{1}{2n_2}+\gamma\right)\left(\frac{1}{6n_1}+\frac{1}{6n_2}+\frac{4}{6n_3}+\gamma\right)\right]^{1/2}}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z_1^2}{\sigma_e^2\left(\frac{1}{2n_1}+\frac{1}{2n_2}+\gamma\right)}+\frac{z_2^2}{\sigma_e^2\left(\frac{1}{6n_1}+\frac{1}{6n_2}+\frac{4}{6n_3}+\gamma\right)}\right)\right] \qquad (27)$$

وبفرض أن $k_1=\frac{1}{2n_1}+\frac{1}{2n_2}, k_2=\frac{1}{6n_1}+\frac{1}{6n_2}+\frac{4}{6n_3}$ وبأخذ اللوغاريتم لدالة الترجيح L ومن ثم بأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة للمعلمة γ ومساواة النتيجة بالصفر ينتج:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = -\frac{1}{2\left(k_1+\hat{\gamma}\right)} - \frac{1}{2\left(k_2+\hat{\gamma}\right)} + \frac{z_1^2}{2\hat{\sigma}_e^2\left(k_1+\hat{\gamma}\right)^2} + \frac{z_2^2}{2\hat{\sigma}_e^2\left(k_2+\hat{\gamma}\right)^2} = 0 \qquad .(28)$$

بعد تبسيط المعادلة وفك الأقواس وتبسيط الحدود نتجت المعادلة الآتية :

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\gamma}^3 + \left[\frac{3}{2}k_1 + \frac{3}{2}k_2 - \frac{1}{2}\frac{z_1^2}{\hat{\sigma}_e^2} - \frac{1}{2}\frac{z_2^2}{\hat{\sigma}_e^2}\right]\hat{\gamma}^2 + \left[2k_1k_2 + \frac{1}{2}k_2^2 + \frac{1}{2}k_1^2\right. \\ &\left. - \frac{z_1^2}{\hat{\sigma}_e^2}k_2 - \frac{z_2^2}{\hat{\sigma}_e^2}k_1\right]\hat{\gamma} + \left[\frac{1}{2}k_1^2k_2 + \frac{1}{2}k_1k_2^2 - \frac{z_1^2}{2\hat{\sigma}_e^2}k_2^2 - \frac{z_2^2}{2\hat{\sigma}_e^2}k_1^2\right] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad .(29)$$

يلاحظ أن المعادلة الناتجة هي من الدرجة الثالثة وهذا يعني أن للمقدر $\hat{\gamma}$ ثلاثة جذور، بشكل عام يمكن القول أن لهذه المعادلة أربع حالات ممكنة من الحلول وهي:

1- أن تكون جميع الجذور حقيقية مختلفة.

2- أن يكون احد الجذور حقيقي وزوج من الجذور العقدية.

3- أن يكون جذر حقيقي مكرر.

4- أن تكون ثلاثة جذور حقيقية احدها مكرر مرتين والأخر مختلف.

ثانيا: في حالة وجود تغاير(تباين مشترك)

في هذه الحالة يمكن كتابة مصفوفة التباين والتباين المشترك للمتغيرين z_2, z_1 بالشكل الآتي:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_e^2\left(\frac{1}{2n_1}+\frac{1}{2n_2}+\gamma\right) & \frac{\sigma_e^2}{\sqrt{12}}\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right) \\ & \sigma_e^2\left(\frac{1}{6n_1}+\frac{1}{6n_2}+\frac{4}{6n_3}+\gamma\right) \end{bmatrix} \qquad (30)$$

تكون الدالة المستخدمة في هذه الحالة عبارة عن دالة الترجيح المشتركة للمغيرين وهي كالآتي:

$$L = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2 |\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2|\Sigma|}\left(z_1^2\, v\left(z_2\right) + z_2^2\, v\left(z_1\right) - 2z_1z_2\, \mathrm{cov}\left(z_1.z_2\right)\right)\right]$$

بفرض أن

$$k_1 = \left(\frac{1}{2n_1}+\frac{1}{2n_2}\right), k_2 = \left(\frac{1}{6n_1}+\frac{1}{6n_2}+\frac{4}{6n_3}\right), k_3 = \left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)$$

تكون الدالة بالشكل الآتي:

$$L=\frac{1}{\left((2\pi)^2\left[\sigma_e^4(k_1+\gamma)(k_2+\gamma)-\frac{\sigma_e^4}{12}k_3^2\right]\right)^{1/2}}\exp\left[-\frac{\sigma_e^2}{2|\Sigma|}\left(z_1^2(k_2+\gamma)+z_2^2(k_1+\gamma)-\frac{2}{\sqrt{12}}z_1z_2k_3\right)\right] \qquad (31)$$

وبأخذ اللوغاريتم للدالة L ومن ثم بأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة إلى γ ومساواة النتيجة بالصفر وبفرض انه $R=\left[(k_1+\gamma)(k_2+\gamma)-\frac{1}{12}k_3^2\right]$ ينتج :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\hat{\gamma}}=-\frac{(k_1+\hat{\gamma})+(k_2+\hat{\gamma})}{2R}-\frac{\hat{\sigma}_e^2}{2\hat{\sigma}_e^4R^2}\Big[R(z_1^2+z_2^2)-\left(z_1^2(k_2+\hat{\gamma})+z_2^2(k_1+\hat{\gamma})-(2/\sqrt{12})z_1z_2k_3\right)\left((k_1+\hat{\gamma})+(k_2+\hat{\gamma})\right)\Big]=0 \qquad (32)$$

بعد فك الأقواس والتبسيط يلاحظ أن المعادلة الناتجة تكون كذلك من الدرجة الثالثة، ولكنها أكثر تعقيدا من الحالة السابقة التي هي حالة عدم وجود تغاير.

ثالثا:عندما يحتوي النموذج على أربعة مستويات (a=4)

عند وجود أربعة مستويات يمكن كتابة مصفوفة H التي تستخدم في إيجاد الدالة المحورة لهذه الحالة بالشكل الآتي:

$$H=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{4}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{3}{\sqrt{12}}\end{bmatrix}$$

تحتوي الدالة الناتجة على متغير ثالث z_3 فضلا عن المتغيرين المذكورين في الحالة السابقة z_2, z_1 إذ إنّ $z_3=\frac{\bar{y}_1+\bar{y}_2+\bar{y}_3-3\bar{y}_4}{\sqrt{12}}$، وهو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بوسط يساوي الصفر وتباين قدره $\left(\frac{1}{12n_1}+\frac{1}{12n_2}+\frac{1}{12n_3}+\frac{9}{12n_4}+\gamma\right)$

أما توقع وتباين z_2, z_1 فيبقى نفسه كما في الحالة السابقة وفي هذه الحالة سيتم إهمال حالـــة وجود التغاير، وعلى هذا الأساس تكون دالة الإمكان الأعظم المحورة كالآتي:

$$L = f\left(z_1;0,v(z_1)\right) f\left(z_2;0,v(z_2)\right) f\left(z_3;0,v(z_3)\right)$$

$$= \frac{1}{\left[(2\pi)^3 v(z_1).v(z_2).v(z_3)\right]^{1/2}} \exp \frac{-1}{2}\left[\frac{z_1^2}{v(z_1)} + \frac{z_2^2}{v(z_2)} + \frac{z_3^2}{v(z_3)}\right]$$

$$= \frac{1}{\left[(2\pi)^3 \hat{\sigma}_e^4 (k_1+\gamma).(k_2+\gamma).(k_3+\gamma)\right]^{1/2}} \exp - \frac{1}{2\hat{\sigma}_e^2}\left[\frac{z_1^2}{(k_1+\gamma)} + \frac{z_2^2}{(k_2+\gamma)} + \frac{z_3^2}{(k_3+\gamma)}\right]$$

$$k_3 = \frac{1}{12n_1} + \frac{1}{12n_2} + \frac{1}{12n_3} + \frac{9}{12n_4} \qquad (33)$$

وبعد أخذ اللوغاريتم ومن ثم الاشتقاق الجزئي بالنسبة للمعلمة γ ومساواة النتيجة بالصفر يكون الناتج كالآتي:

$$(k_1+\hat{\gamma})(k_2+\hat{\gamma})^2(k_3+\hat{\gamma})^2 + (k_1+\hat{\gamma})^2(k_2+\hat{\gamma})(k_3+\hat{\gamma})^2 + (k_1+\hat{\gamma})^2(k_2+\hat{\gamma})^2$$
$$(k_3+\hat{\gamma}) - \frac{z_1^2}{\hat{\sigma}_e^2}(k_2+\hat{\gamma})^2(k_3+\hat{\gamma})^2 - \frac{z_2^2}{2\hat{\sigma}_e^2}(k_1+\hat{\gamma})^2(k_3+\hat{\gamma})^2$$
$$- \frac{z_3^2}{2\hat{\sigma}_e^2}(k_1+\hat{\gamma})^2(k_2+\hat{\gamma})^2 = 0 \qquad (34)$$

يلاحظ بعد فك الأقواس والتبسيط أن المعادلة الناتجة تكون من الدرجـــة الخامســـة أي توجد للمقدر γ خمسة جذور، ولكن هذه المعادلة لم يتوصل العلم إلى حلها بشـــكل تحليلـــي إلا باستخدام الطرائق العددية (طرائق التكرار).

وهكذا لو نستمر في إضافة مستويات أخرى سنلاحظ انه عند إضافة مســـتوى ســـتزداد درجة المعادلة الناتجة درجتين عن المعادلة التي قبلها التي تحتوي على عدد مســـتويات اقـــل بواحد.

الجانب التطبيقي

البيانات التي سيتم استخدامها ولدت عشوائيا باستخدام البرنـــامج الحاســـوبي Matlab V.7.0، حيث ولدت ثلاثة مستويات لعامل واحد وعدد المشاهدات (n) فيها مختلـــف بحيـــث تكون غير موزونة، ولدت البيانات تبعاً للنموذج الرياضي المذكور في المعادلة (1) الأتي:

$$y_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij} \quad , i = 1,2,3 \; ; j = 1,....n_i$$

وتم فرض القيم الاتية لاجراء التوليد.

$\mu = 34$ هو الوسط العام.

$\varepsilon_{ij} \sim N(0,9.61)$ مركبة الخطأ

$a_i \sim N(0, 27.04)$ تأثير المستوى i

$n_1 = 28 \;, n_2 = 22 \;, n_3 = 25$ (عدد المشاهدات في كل مستوى).

وهذه البيانات مذكورة في جدول (1) الأتي:

جدول (1): مشاهدات المستويات التي ولدت

y_{ij} عند المستوى a_3	y_{ij} عند المستوى a_2	y_{ij} عند المستوى a_1
31.9125	33.9651	32.6868
38.5131	30.3720	27.6326
34.3480	32.5072	37.2486
28.0360	38.1557	33.1978
21.7952	31.9258	25.6368
29.1193	35.2522	35.5056
28.0193	35.7167	27.8584
37.5624	35.5749	20.5480
37.6162	34.4623	41.6267
47.2755	37.0471	32.0211
35.9866	35.5575	32.6341
32.5853	39.9810	39.3698
38.4548	34.9405	35.0091
31.6694	47.4252	33.3641
30.8231	36.9823	32.6027
34.4066	30.8648	29.9321
34.7377	39.4858	23.8284
29.2231	33.8224	28.2832
37.3937	28.5300	40.6320
27.6104	30.4694	31.6746
35.8189	32.2559	29.2130
39.8659	31.4388	38.3999
38.0737		26.4385
35.0349		24.3588
32.4750		31.8786
		41.0134
		32.0209

		33.6896
$n_3 = 25$	$n_2 22$	$n_1 = 28$

اولا:عندما يحتوي النموذج على مستويين.

بعد تحليل بيانات المستوى الأول والمستوى الثاني وجدت قيمة مقدر تحليل التباين $\hat{\gamma}^*$ والـــذي يساوي:

$$\hat{\gamma}^* = \frac{MSA - MSe}{PMSe} = \frac{94.5 - 23.9}{(24.64)(23.9)} = 0.1199$$

أما مقدر الإمكان الأعظم المحور فيكون مساوياً إلى:

$$\hat{\gamma} = \left(\frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2}{\hat{\sigma}_e^2} - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{(32.082 - 34.851)^2}{23.9} - \frac{1}{28} - \frac{1}{22} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.1198$$

نلاحظ من النتائج التي تم الحصول عليها أعلاه أن القيمة المتوقعة لمقــدر الإمكــان الأعظــم المحور يساوي تقريبا القيمة المتوقعة لمقدر تحليل التباين.

ثانياً:عندما يحتوي النموذج ثلاث مستويات:

الهدف في هذا الجزء هو إيجاد المقدر من بين الجذور الثلاثة الناتجة الذي يعطينا أكبــر دالة إمكان، وهذا عن طريق تعويض الجذر الموجب الناتج في دالة الإمكان الأعظم المحــورة معادلة (27) (في حالة وجود أكثر من جذر موجبة)، والجذر الذي يملــك أكبــر قيمــة عنــد تعويضه يعد هو قيمة المقدر من بين القيم الناتجة.

- **التطبيق العملي (Applications):**

بعد تحليل البيانات نجد أولا مقدر تحليل التباين والذي يساوي:

$$\hat{\gamma}^* = \frac{MSA - MSe}{PMSe} = \frac{50.6 - 24.9}{(49.76)(24.9)} = 0.0207$$

أما مقدر $\hat{\gamma}$ الذي يتم إيجاده بحل معادلة (29) وإيجاد الجذور الثلاثة للمقدر $\hat{\gamma}$ وكالآتي:

بعد تعويض البيانات نتجت معادلة (29) بالشكل الآتي:

$$\hat{\gamma}^3 + 0.0413\hat{\gamma}^2 - 0.0015\hat{\gamma} - 6.3305e-005 = 0$$

لحـــل المعادلـــة الناتجـــة أعـــلاه يـــتم اســـتخدام طريقـــة الدســـتور المـــذكورة فـــي (Mikolajski and Schneider ,2006)

في البيانات الموجودة لدينا كانت قيمة المميز (نرمز له x) المذكور أدناه تساوي:

$$x = c^2 + \frac{4}{27}b^3 - \frac{2}{3}abc - \frac{1}{27}a^2b^2 + \frac{4}{27}a^3c$$
$$x = 3.11758e-014$$

بما أنّ قيمة المميز موجبة هذا معناه أن للمعادلة جذر حقيقي واحد زوج من الجـذور العقديـة وتحسب هذه الجذور باستخدام الصيغة الآتية:

$$\hat{\gamma}1 = \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{x}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{x}}{2}} - \frac{a}{3}$$
$$.\hat{\gamma}_2 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{x}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{x}}{2}}\right) - \frac{a}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{x}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{x}}{2}}\right)$$
$$.\hat{\gamma}_3 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{x}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{x}}{2}}\right) - \frac{a}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{x}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{x}}{2}}\right)$$
$$q = c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3 \qquad .(35)$$

بعد استخدام الصيغة (35) ظهرت النتائج بالشكل الآتي:

$$q = -5.2283e-004$$
$$\hat{\gamma} = \begin{Bmatrix} 0.0392 \\ -0.0402 - 0.0001i \\ -0.0402 + 0.0001i \end{Bmatrix}$$

يعد الجذر الموجبة في هذه الحالة هو مقدر مركبة التباين، وكما ذكر مسبقا في حالـــة وجـــود أكثر من جذر موجب يتم تعويضهم في دالة الإمكان المحورة لمعرفة أي قيمة تعطي اكبر دالة إمكان تعتبر هي المقدر.

الاستنتاجات

1. يمكن حل معادلات إمكان أعظم محورة لنموذج عشوائي غير موزون ذي عامل واحد وبثلاث مستويات بطريقة تحليلية دون اللجوء إلى طرائق عددية وإيجاد قيمـــة مقـــدر مركبة التباين.

2. لوحظ عندما يحتوي النموذج على مستويين تكون المعادلة الناتجة من الدرجة الأولى وكلما ازداد عدد المستويات واحد زادت درجة المعادلة الناتجة درجتين عن الحالة التي قبلها، وهذا يدل أنّ للمقدر عدة قيم وليست قيمة واحدة وعلينا استخدام المقدر المناسب.

التوصيات

1. إن معادلات الإمكان تعطينا أكثر من جذر، وان واحد من هذه الجذور فقط هو مقدر الإمكان الأعظم، وأننا يجب أن ندقق بجذر معادلة الإمكان هو فعلا يعطينا النتيجة التي تكون فيها دالة الإمكان اكبر ما يمكن.
2. نوصي بدراسة المقدرات المذكورة في الرسالة عندما يكون عدد المشاهدات كبيرا أي نستخدم نتائج asymptotic statistical method. .
3. دراسة احتمال حصولنا على جذور مركبة وجذور سالبة.

References المصادر

.

1. Dobson, A.J., 2002, "An Introduction to Generalized Linear Models", 2nd Edition , Chapman & Hall
2. Lancaster; H. O., 1965, "the Helmert Matrices, the American Mathematical Monthly" 72, 4-12.
3. Mikolajski; J. and Schmeidel; E., 2006, "Comparison of Properties of Solutions of Differential Equations and Recurrence Equations with the Same Characteristic Equation (on Example of Third Order Linear Equations with Coefficients)", Opuscula Mathematica 26, 343-349.
4. Sahai; H., and Ojeda; M., 2005,"Analysis of Variance for Random Models Unbalanced Data Theory, Methods, Applications, and Data Analysis", Volume II, Birkhauser Boston, New York.
5. Searle; S.R., 1971, "Linear Models", John Wiley & Sons, New York.