

التنبؤ بوساطة الانحدار والكريكنك للبيانات المكانية مع التطبيق
**Prediction By Regression and kriging For Spatial Data With
Application**

بشار طه خضير
مدرس مساعد
مديرية تربية نينوى

د. محمد نذير اسماعيل قاسم
استاذ مساعد
جامعة الموصل / كلية التربية / قسم الرياضيات

المخلص

تناول البحث التنبؤ عن العملية العشوائية المكانية غير المستقرة. فالتنبؤ يتم بواسطة عدة اساليب تناولنا منها أسلوبين هما: أسلوب الانحدار (مقدر المربعات الصغرى العامة) وأسلوب الكريكنك الشامل. وكما هو معلوم ان العملية العشوائية غير المستقرة لها اتجاه (وسط) بشكل أنموذج خطي أو غير خطي، ولهذه العملية يتم إيجاد دالة التغير من معرفة دالة الفاريوكرام والأخير تم توفيقه بأنموذج الفاريوكرام الكروي ومن أجل تقدير معاملات الأنموذج الكروي بواسطة مقدر اصغر معيار تربيعي غير متحيز والذي يتطلب كون دالة التغير خطية في المعلمات، تم تحويل الأنموذج الكروي إلى أنموذج خطي بواسطة متسلسلة تيلور في التقريب الخطي.

تم تطبيق التنبؤ في الأسلوبين على بيانات حقيقية تمثل ارتفاع مناسيب المياه الجوفية في 47 بئرا مع إحداثيات مواقعها في قضاء سنجار - محافظة نينوى - العراق وكانت النتائج مشجعة جداً حيث أظهرت تقارب القيمة التنبؤية مع القيم الحقيقية فضلاً عن حساب تباين التنبؤ في الأسلوبين والذي يبين ان تباين كريكنك الشامل اقل من تباين الانحدار.

Abstract

This study deals with the prediction of the non-stationary spatial stochastic process. The prediction is done by two techniques which are regression technique (generalized least square estimation) and universal kriging technique. As it is familiar, that the non-stationary stochastic process has a trend (mean) as a linear or non-linear model. By this process we can find covariance function from knowing the variogram function and the latter is attributed to a spherical variogram model, also in order to estimate parameters of spherical model by minimum norm quadratic unbiased estimator which requires that the covariance function must be linear in the parameters, then changing the spherical model into an approximated linear model by Taylor series in the linear approximation

The prediction in these two techniques is applied to real data which represent height levels of ground water of 47 wells with their regional coordinates in Sinjar district in Ninevah Governorate in Iraq. the results were so encouraging where we show the approximation between the predictive values and the real values as well as computing the variance of prediction in these two techniques. It is shown that the prediction variance of universal kriging is less than that of regression.

1. المقدمة :

تتناول هذه الدراسة تنبؤ العملية العشوائية المكانية بواسطة استخدام دالة الفاريوكرام (Variogram Function) أو دالة التباين (Covariance Function) للمتغيرات المكانية (Regionalized Variable) وكذلك التنبؤ عن هذه العملية بواسطة الانحدار والكريكنك. تم في هذه الدراسة التنبؤ عن ظاهرة مكانية تشتمل على بيانات مياه جوفية موجودة في مواقع معينة معروفة في منطقة محددة D. نقوم بعملية التنبؤ عن هذه الظاهرة في مواقع أخرى غير معلومة ضمن المنطقة D بالاستفادة من البيانات المعروفة ونجري عملية التنبؤ بواسطة أسلوب الانحدار (Regression Technique) الذي يتضمن استخدام مقدر المربعات الصغرى العامة (Generalized Least Square Estimator) ثم أسلوب كريكنك (Kriging Technique) في الإحصاء المكاني وهو أسلوب يستخدم في التنبؤ بصورة خاصة عن الظواهر المكانية مثل المعادن فوق وفي باطن الأرض والمياه الجوفية وتلوث البيئة وانتشار الغابات الطبيعية، فضلاً عن التنبؤ عن انتشار الأمراض الوبائية والكوارث الطبيعية واستخدامه في المجالات الاقتصادية (Diggle and Ribeiro (2007). كما يستخدم أسلوب الكريكنك في أي دراسة إذا كان من الممكن تعريف الظاهرة قيد الدراسة على أساس المسافة التي تفصل بين عينات بيانات هذه الظاهرة. أدى انتشار أسلوب الكريكنك في التنبؤ إلى تقليل استخدام أسلوب الانحدار في التنبؤ وذلك إن الأخير يستوجب تعريفاً متغيراً واحداً أو عدة متغيرات توضيحية في حين لا يتضمن الكريكنك سوى معرفة المسافة بين مشاهدات الظاهرة. فضلاً عن ذلك فإن متوسط مربع الخطأ للتنبؤ في أسلوب الكريكنك أقل دائماً من أسلوب الانحدار (Cressie (1993), Stein (1999).

2. هدف البحث :

إن هدف البحث الأساسي هو إجراء التنبؤ عن ظاهرة مكانية بواسطة أسلوب الانحدار وأسلوب الكريكنك. بعد دراسة وفحص الظاهرة المكانية قيد الدراسة من حيث خاصية الاستقرار (Stationarity) أو عدم الاستقرار (Nonstationarity) . وتقدير معاملات دالة التباين أو دالة الفاريوكرام من أجل الحصول على تنبؤ دقيق وبعد الحصول على التنبؤ بواسطة كلا الأسلوبين يتم مقارنة دقة وضبط التنبؤ وذلك بواسطة حساب تباين الانحدار وتباين الكريكنك لمعرفة أيهما أفضل وأحسن دقة ليتم الاعتماد عليه .

3. المتغير المكاني ودالة الفاريوكرام:

يتعامل الإحصاء المكاني مع متغيرات عشوائية تختلف عن المتغيرات العشوائية الاعتيادية، حيث أن نظرية الإحصاء المكاني (أو الفراغي) تعتمد على دراسة الاختلافات الموجودة بين المتغيرات المكانية $Z(x)$, $Z(x+h)$ والتي تفصل بينهما إزاحة h .

لكل قيمة من قيم المتغير المكاني إحدائيات تمثل موقع تلك النقطة سواء كانت على سطح الأرض في مستوى (ذي بعدين) أو في باطن الأرض أو خارج الأرض في فراغ (ذي ثلاثة أبعاد) .

ليكن $Z(x)$ متغيراً مكانياً في الموقع X ضمن المنطقة D في فضاء اقليدس حيث ان

$$X \in DR^p \text{ . علما أن :}$$

$$X = (u, v)$$

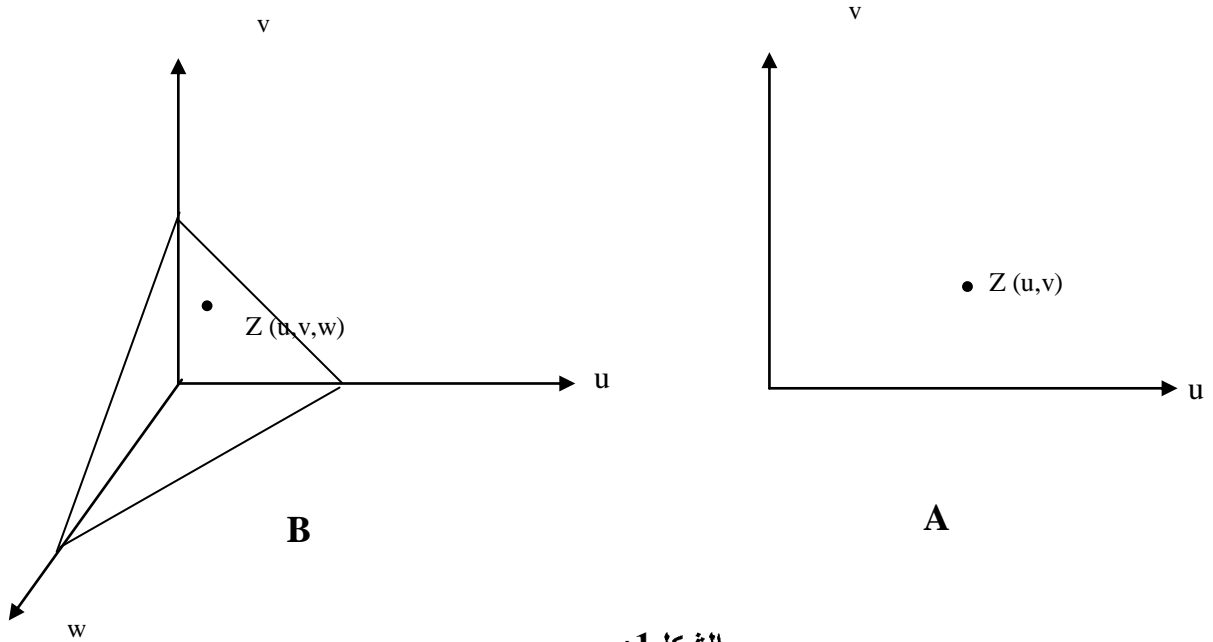
$P=2$ تكون ذا بعدين في المستوي

والتي تم ايضاحها بالشكل (A-1)

$$X = (u, v, w)$$

$P=3$ تكون ذا ثلاثة أبعاد في الفراغ

والتي تم ايضاحها بالشكل (B-1)



الشكل 1:

A - موقع المتغير المكاني في فضاء ذي بعدين

B - موقع المتغير المكاني في فضاء ذي ثلاثة أبعاد

إن تباين مشاهدات المتغير المكاني وخاصة في الإحصاء المكاني يكون أحيانا كبيراً

أو غير معروف مما يؤدي إلى أن تكون قيم معاملات الارتباط الناتجة من القانون :

$$\rho_{Z(x), Z(x+h)} = \frac{\text{cov } Z(x), Z(x+h)}{\sigma_z(x) \cdot \sigma_z(x+h)} \dots \dots \dots (1)$$

صغيرة وبالتالي تؤدي الأخيرة إلى تفسيرات خاطئة ونتائج غير دقيقة، وعلى أساس ذلك اقترح العالم Krige(1951) دالة شبه الفاريوكرام (Semi-variogram) المعروفة بالصيغة الآتية:

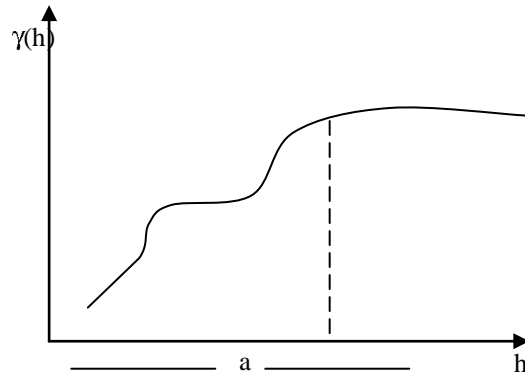
$$\gamma(h)=\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} Z(x_i)-Z(x_i+h) \quad \dots\dots\dots(2)$$

وهي متوسط مربع الاختلافات الموجودة بين المشاهدات المكانية التي تبعد عن بعضها البعض إزاحة h، علماً أن n(h) تمثل عدد أزواج المشاهدات Z(xi) و Z(xi+h) التي تفصل بينهما إزاحة h، (Cressie 1993).

وعندما نضرب المعادلة (2) بالعدد 2 يتغير اسمها إلى دالة الفاريوكرام والتي تكتب بالصيغة التالية:

$$2\gamma(h)=\frac{1}{n(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} Z(x_i)-Z(x_i+h) \quad \dots\dots\dots(3)$$

والتي تم ايضاحها بالشكل (2)



الشكل 2: منحنى دالة الفاريوكرام

وكلما ازدادت الإزاحة h بين المشاهدات أصبح الفاريوكرام كبيراً حتى يستقر ارتفاعه عند إزاحة معينة مثل h = a وهذه الإزاحة a تسمى المدى وبعدها نلاحظ التغيرات يبدأ بالتلاشي في دالة الفاريوكرام وهذا يفسر لنا خارج منطقة الظاهرة، أي عدم وجود تأثير لها أو وجودها بكميات قليلة جداً .

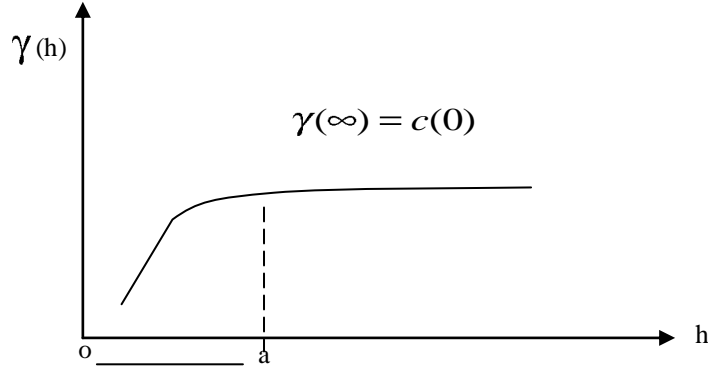
من تعريف دالة شبه الفاريوكرام يتبين بأنها دالة متزايدة مع ازدياد h ويستقر ويصبح مساوياً للتباين، ويستلزم الخواص التالية:

1. $\gamma(0) = 0$
2. $\gamma(h) = \gamma(-h)$

أي أن دالة الفاريوكرام متناظرة

وبشكل عام عندما تزداد الإزاحة h فان متوسط مربع الفرق بين المتغيرين $Z(x+h)$ و $Z(x)$

يتجه بالتزايد أيضا ، وتسمى عندئذ بدالة شبه الفاريوكرام الشكل (3).

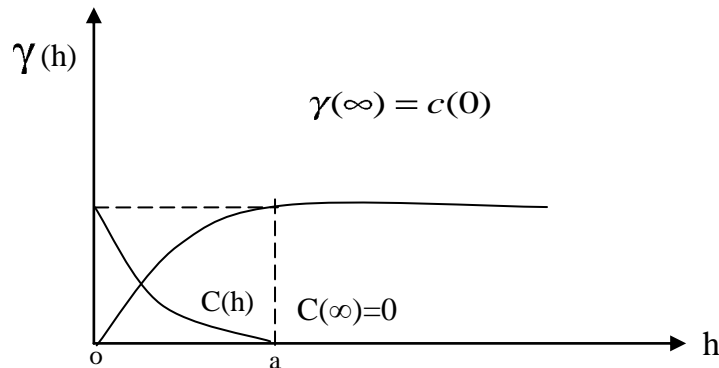


الشكل 3: تزايد دالة شبه الفاريوكرام

عندئذ فان قيمة $\gamma(\infty)$ تسمى الـ "Sill" في مصطلحات الاحصاء المكاني، Dubrule (2003). وهي ببساطة تعني التباين الاولي $C(0)$ Apriori variance للدالة العشوائية

$$\text{Cressie}(1993) ، \lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = \gamma(\infty) = C(0)$$

حالات كهذه يكون فيها التباين الاولي موجودا وكذلك دالتا التغاير والفاريوكرام وتتميزان بواسطة قيمة الـ Sill والمدى Range تدعى بالانتقال وتناظر الدالة العشوائية المكانيه التي هي ليس فقط تحقق الفرضية الاساسية ولكن ايضا تحقق الاستقرارية من الرتبة الثانية . الشكل(4).



الشكل 4: دالة التغاير والفاريوكرام

4. صياغة النموذج الخطي العام في الإحصاء المكاني

لتكن لدينا العملية العشوائية المكانية $Z(x)$ و $x=(u,v)^T$ و $X \in R^2$ و $\{Z(x), X \in D\}$

وإذا كان المتغير المكاني $Z(x)$ خطياً يمكن كتابته بالشكل التالي

$$Z(x) = \sum_{i=1}^r f_i(x)\beta_i + e(x) = f^T(x)\beta + e(x) \quad \forall x \in D \dots\dots\dots(4)$$

حيث ان β_i معاملات مجهولة و $f_i(x)$ دوال معلومة تمثل احداثيات المواقع أن المتغير

المكاني $Z(x)$ يحقق الفرضيات التالية :

الفرضية الاولى :

$$E[Z(x)] = f^T(x)\beta \quad \forall x \in D \dots\dots\dots(5)$$

الفرضية الثانية :

$$E[Z(x+h)-Z(x)]^2 = 2\gamma(h) \quad \forall x, x+h \in D \dots\dots\dots(6)$$

ويكون $\gamma(h)$ 2 موحد الخواص (Isotropic)

أي يعتمد فقط على المسافة h وليس على الاتجاه، (Journal(1986)

الفرضية الثالثة : دالة التباين موجودة ومعرفة كالآتي

$$Cov[Z(x),Z(x+h)] = C(h) \quad \forall x, x+h \in D \dots\dots\dots(7)$$

.Goovaerts(1997)

نفترض أن لدينا n من المشاهدات للمتغير المكاني هي

$$Z(x_1), Z(x_2), Z(x_3), \dots\dots\dots, Z(x_n)$$

عند المواقع

$$x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots, x_n$$

عندئذ يمكن كتابة النموذج (3) بلغة المصفوفات وكالآتي :

$$Z = F\beta + e$$

حيث أن:

$$\begin{pmatrix} Z(x_1) \\ Z(x_2) \\ \vdots \\ Z(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_n & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e(x_1) \\ e(x_2) \\ \vdots \\ e(x_n) \end{pmatrix}$$

5. التقريب الخطي للدالة غير الخطية

نتناول هذه الفقرة لأن في هذه البحث دالة الفاريوكرام الكروية يتطلب تقدير معالمها بواسطة مقدر أصغر معيار تربيعي غير متحيز وهذا الأسلوب يتطلب أن تكون دالة التباير خطية في المعلمات ، (Rao and Kleffe (1988).

فرضا أن الدالة $\varphi(s)$ هي دالة غير خطية في المتغيرات s_i

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_r)^T$$

ونقطة جوار معلومة $s_0 = (s_{10}, s_{20}, \dots, s_{r0})^T$ وجميع مشتقات الجزئية

للدالة $\varphi(s)$ موجودة ومعرفة .

عندئذ يمكن كتابة الدالة $\varphi(s)$ بواسطة تبسيط سلسلة تيلر (Taylor Series Expansion)

حول النقطة s_0 كالآتي:

$$\varphi(s) = \varphi(s_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (s - s_0)^T \text{grad}_s \varphi \Big|_{s=s_0} \bar{k} + \text{Rm}(s, s_0)$$

ونطبق التقريب الخطي على دالة التباير (النموذج الكروي) والمعرفة بالشكل الآتي :

$$c(h) = \Psi_0 + \Psi \left[\left(1 - \frac{3h}{2a} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right) \right] \dots \dots \dots (8)$$

وبعد عمل التقريب الخطي ستكون دالة التباير لها الشكل الآتي: خضير (2011).

$$c^*(h; \theta) = k_o(h) + \sum_{i=1}^r (\theta_i - \theta_{io}) k_i(h)$$

$$= k_o(h) + \sum_{i=1}^r \theta_i k_i(h) - \sum_{i=1}^r \theta_{io} k_i(h)$$

$$= k_o(h) - \sum_{i=1}^r \theta_{io} k_i(h) + \sum_{i=1}^r \theta_i k_i(h) \dots \dots \dots (9)$$

حيث أن:

$$k_i(h) = \left(\frac{\partial c(h; \theta)}{\partial \theta_i} \right)_{\theta = \theta_o}$$

$$k_o(h) = c(h; \theta)_{\theta = \theta_o}$$

6. الانحدار الخطي المتعدد:

تتضمن معظم مسائل الانحدار أكثر من متغير مستقل واحد وبشكل عام يمكن كتابة أنموذج الانحدار الخطي المتعدد بالشكل التالي :

$$Z(x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + e_i \dots \dots \dots (10)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, \dots, k$$

حيث أن x_{ij} دوال معلومة تمثل إحدائيات مواقع المشاهدات $Z(x_i)$

وان $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ هي معلمات غير معلومة يتطلب تقديرها من البيانات المتوافرة.

يمكن كتابة الأنموذج (10) بصيغة المصفوفات

$$Z = F\beta + e \dots \dots \dots (11)$$

وهذا الأنموذج يسمى بالأنموذج الخطي العام (General Linear Model) حيث أن Z متجه بسعة (n) من المشاهدات و F مصفوفة معلومة بسعة $(n \times (k+1))$ من إحدائيات المشاهدات و β متجه من المعلمات المجهولة بسعة $(k+1)$ وان e متجه الأخطاء العشوائية بسعة (n) .

وان :

$$E(e) = 0$$

$$\text{Var}(e) = C$$

8. النموذج الرياضي لتنبأ الانحدار :

يمكن كتابة المعادلة (10) بالشكل التالي

$$\hat{Z}(x_i) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 u_i + \hat{\beta}_2 v_i \dots \dots \dots (12)$$

حيث ان v_i, u_i تمثل احدائيات مواقع المشاهدات $Z(x_i)$

وان $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ معلمات مجهولة تم حسابها من قانون مقدر المربعات الصغرى العامة وكالاتي:

$$\hat{\beta} = \left(F^T \hat{C}^{-1} F \right)^{-1} F^T \hat{C}^{-1} Z \dots \dots \dots (13)$$

حيث أن \hat{C} تمثل مصفوفة التباين.

وأن تباين $\hat{\beta}$ هو:

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \left(F^T \hat{C}^{-1} F \right)^{-1}$$

وتباين التقدير $\hat{Z}(x_i)$ هو

$$\text{Var} \left(\hat{Z}(x_i) \right) = F \text{Var}(\hat{\beta}) F^T$$

وأن

$$b_4 = \text{diag}[\text{Var}(\hat{Z}(x_i))] \dots \dots \dots (14)$$

والتي تمثل تباين تنبؤ الانحدار

9. نظرية كريكنك:

أن مسألة التنبؤ الموقعي (Local prediction) في الإحصاء المكاني هي الحصول على أفضل تنبؤ لمتوسط المتغير المكاني المعروف في منطقة الدراسة ذات بعدين أو ثلاثة أبعاد مع افتراض الفرضية الأساسية أو الاستقرار في المنطقة قيد الدراسة.

حيث أن الاستقرار قد تكون في كثير من الدراسات العملية غير متوفرة. وسيقتصر بحثنا على التنبؤ الخطي الذي يتضمن ان متوسط العملية العشوائية له اتجاه (Trend) حيث يعتمد على موقع المتغير المكاني (Boogaart(1999).

10. النموذج الرياضي لتنبأ كريكنك:

نفترض ان μ وسط العملية العشوائية المكانية $\{Z(x), X \in D\}$ غير معلوم ان $E[Z(x)] = \mu$ ، ونريد التنبؤ عن $Z(x_0)$ عند الموقع (x_0) .

ان افضل متنبأ خطي غير متحيز $\hat{Z}(x_0)$ يكون كالآتي

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) \dots \dots \dots (15)$$

حيث ان

$$Z = (Z(x_1), Z(x_2), \dots \dots \dots Z(x_n))^T$$

$$\lambda = \gamma^{-1} \gamma_0 - \gamma^{-1} F \left[F^T \gamma^{-1} F \right]^{-1} \left[F^T \gamma^{-1} \gamma_0 - f(x_0) \right] \dots \dots \dots (16)$$

ولكي يكون $\hat{Z}(x_0)$ افضل متنبأ خطي غير متحيز يجب تحقيق الشرطين

1. $E \left(\hat{Z}(x_0) \right) = Z(x_0)$
2. $\sigma_k^2 = \text{var} \left(\hat{Z}(x_0) - Z(x_0) \right)$ is minimum

هذا التباين يدعى تباين كريكنك . خضير (2011) وله الصيغة الآتية:

$$\sigma_k^2 = \gamma_0^T \gamma^{-1} \gamma_0 - \gamma_0^T \gamma^{-1} F - f^T(x_0) \left[F^T \gamma^{-1} F \right]^{-1} F^T \gamma^{-1} \gamma_0 - f(x_0) \quad (17)$$

11. الجانب التطبيقي:

تمثل في التنبؤ عن مستويات المياه الجوفية لبيانات حقيقية تمثل ارتفاع مناسب آبار المياه الجوفية في قضاء سنجار في محافظة نينوى، وتمثل هذه البيانات (47) (بئراً) مع إحدائياتها حيث أن $Z(x_i)$ تمثل ارتفاع منسوب المياه الجوفية فيها بوحدة المتر في البئر عند الموقع $x_i = (u_i, v_i)$ والتي تمثل إحدائيات البئر في هذه النقطة، تم الحصول على هذه البيانات من رسالة ماجستير غير منشورة . المحسن (1985)، والجدول (1) يوضح البيانات الحقيقية مع إحدائيات مواقعها.

جدول 1: البيانات الحقيقية مع إحدائيات مواقعها

ت	u	v	z(x)
25	1.5	3.1	6.1
26	1.3	5.1	5.8
27	1.1	5.4	5.6
28	1.2	4.4	5.4
29	1.4	4.2	5.3
30	3.2	3.9	7.1
31	1.6	3.5	6.2
32	1.8	3.1	6.1
33	1.8	3.3	6.2
34	1.8	2.9	6.1
35	1.1	5.1	5.8
36	1.5	4.9	5.6
37	1.4	5.4	5.2
38	1.4	4.7	5.2
39	1.7	2.8	6
40	1.5	3	6
41	2	3.3	6.1
42	0.8	4.5	5.9
43	1.3	4.9	5.6
44	1.2	5.2	5.6
45	1	4.4	5.2
46	1	4.2	5.1
47	0.7	3.1	3.9

ت	u	v	z(x)
1	1.9	3.7	6.2
2	3.8	4.3	7.4
3	1.5	3.7	6.2
4	1.4	3.9	6.2
5	4.5	4.4	7.3
6	1.8	3.8	6.1
7	1.5	4	6.1
8	3	4	3.6
9	3	5.1	3.4
10	3.3	4.9	3.4
11	4	4.5	7.5
12	4.9	4.2	7.4
13	1.7	3.5	6.2
14	4.7	4	7.3
15	1.8	3.4	6.2
16	1.7	2.9	6.2
17	0.8	3.1	3.9
18	0.8	3.3	3.5
19	0.8	3	3.5
20	3.2	3.6	3.2
21	3	3.9	7.2
22	1.7	3.8	6.2
23	1.5	3.9	6.2
24	4.5	4.2	7.3

12. تحليل البيانات وملائمة نموذج الفايروكرام :

تم حساب مصفوفة المسافات بين (47) بئرا وذلك باستخدام قانون المسافة الاقليدية

والتي يرمز لها بالرمز h .

$$h_{ij} = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2}$$

حيث أن كل موقع يتمثل بالإحداثيات

$$u_i, v_i \quad i = 1, 2, \dots, 47$$

$$u_j, v_j \quad j = 1, 2, \dots, 47$$

وهكذا تم الحصول على مصفوفة ذات بعد (47×47) تحتوي على جميع المسافات بين

أزواج المشاهدات . وقسمت هذه المسافة إلى عشر فئات بحيث شملت هذه الفئات اقل قيمة

واكبر قيمة للمسافة ، ثم حساب مركز كل فئة ليمثل المسافة التقريبية h . وكذلك تم حساب

عدد أزواج المشاهدات $n(h)$ التي تبعد عن بعضها البعض مسافة h لكل فئة، وأخيرا تم

حساب دالة الفايروكرام لكل فئة من خلال تطبيق المعادلة (2) والمعادلة (3) والنتائج موضحة

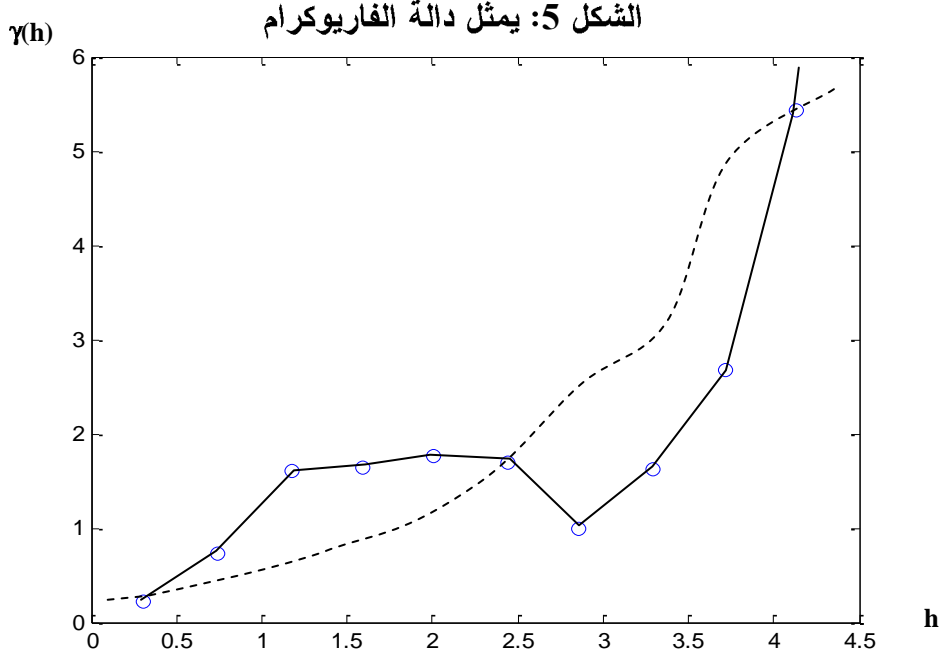
في الجدول (2).

الجدول 2: نتائج حساب دالة الفايروكرام

الفئات	أحد الأدنى	أحد الأعلى	المركز (h)	n(h)	$[z(x_i) - z(x_i+h)]^2$	$\gamma(h)$
فئة(1)	0.1	0.5099	0.305	150	0.3224	0.2264
فئة(2)	0.5385	0.9487	0.7436	150	0.7601	0.7298
فئة(3)	0.9849	1.3601	1.1725	181	1.1515	1.6026
فئة(4)	1.3892	1.7889	1.589	157	1.5761	1.6375
فئة(5)	1.8	2.2204	2.0102	147	1.9893	1.7677
فئة(6)	2.2361	2.6476	2.4419	117	2.4162	1.6901
فئة(7)	2.6571	3.048	2.8525	62	2.8514	0.9945
فئة(8)	3.0806	3.5	3.2903	68	3.2163	1.6201
فئة(9)	3.5057	3.9217	3.7137	35	3.5871	2.6791
فئة(10)	3.9319	4.3417	4.1368	14	3.7962	5.4261

13. تحديد نموذج الفاريوكرام:

تم رسم العلاقة بين $h, \gamma(h)$ ومن ثم توفيق منحنى الفاريوكرام بتمرير أفضل منحنٍ بين نقاط تلك العلاقة ويوضح الشكل (5) دالة الفاريوكرام .



نلاحظ من الشكل (5) ان المنحني يستمر في الصعود وهذا دليل على ان العملية العشوائية المكانية لهذه البيانات غير مستقرة .

Cressie (1993)

إلا انه من الممكن اعتماد الأنموذج الكروي الاتي:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \psi_0 + \psi \left[\frac{3}{2}(h/a) - \frac{1}{2}(h/a)^3 \right] & \text{if } h < a \\ \psi_0 + \psi & \text{if } h \geq a \end{cases}$$

حيث a, ψ_0, ψ هي معاملات الأنموذج الكروي والتي يتم الحصول عليها بشكل تقريبي من رسم منحنى دالة الفاريوكرام والتي تعدّ قيماً ابتدائية لهذه المعلمات وكما يلي: نلاحظ ان المنحني يقطع المحور العمودي $\gamma(h)$ عند $\psi_0=0.2$ والمنحني يزداد ارتفاعاً ويكاد يستقر عند $h=4.14$ مما يدل على ان المدى $a=4.14$ ، نلاحظ ان دالة الفاريوكرام تستقر عند $\gamma(h)=5.5$ والذي يساوي التباين تقريبا .

14. تنبؤ اسلوب الانحدار:

تم حساب القيم التنبؤية للانحدار من المعادلة (12) وكالاتي:

$$\hat{Z}(x_i) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 u_i + \hat{\beta}_2 v_i$$

وكذلك تم حساب تباين الانحدار من المعادلة (14) والجدول (3) يمثل نتائج القيم التنبؤية للانحدار ، حيث كان متوسط مربعات الخطأ مقداره :

$$Mse=1.1843$$

الجدول 3: القيم التنبؤية للانحدار

ألتسلسل	u	v	z(xi)	z^(xi)	v(z^(xi))
24	4.5	4.2	7.3	6.8459	3.1986
25	1.5	3.1	6.1	5.3731	1.4535
26	1.3	5.1	5.8	5.5675	1.7653
27	1.1	5.4	5.6	5.522	2.2414
28	1.2	4.4	5.4	5.4248	1.3099
29	1.4	4.2	5.3	5.4844	1.1499
30	3.2	3.9	7.1	6.2326	1.5082
31	1.6	3.5	6.2	5.4735	1.1662
32	1.8	3.1	6.1	5.5048	1.3836
33	1.8	3.3	6.2	5.5331	1.2357
34	1.8	2.9	6.1	5.4766	1.5692
35	1.1	5.1	5.8	5.4797	1.8812
36	1.5	4.9	5.6	5.6271	1.4857
37	1.4	5.4	5.2	5.6538	2.0766
38	1.4	4.7	5.2	5.555	1.3713
39	1.7	2.8	6	5.4186	1.6919
40	1.5	3	6	5.359	1.5411
41	2	3.3	6.1	5.6209	1.2236
42	0.8	4.5	5.9	5.2632	1.6386
43	1.3	4.9	5.6	5.5393	1.5729
44	1.2	5.2	5.6	5.5377	1.9303
45	1	4.4	5.2	5.337	1.4376
46	1	4.2	5.1	5.3087	1.376
47	0.7	3.1	3.9	5.0217	1.948

ألتسلسل	u	v	z(xi)	z^(xi)	v(z^(xi))
1	1.9	3.7	6.2	5.6335	1.0426
2	3.8	4.3	7.4	6.5526	2.1691
3	1.5	3.7	6.2	5.4578	1.1254
4	1.4	3.9	6.2	5.4421	1.1299
5	4.5	4.4	7.3	6.8742	3.2492
6	1.8	3.8	6.1	5.6036	1.0306
7	1.5	4	6.1	5.5001	1.0885
8	3	4	3.6	6.1589	1.3487
9	3	5.1	3.4	6.3142	1.9118
10	3.3	4.9	3.4	6.4177	1.9618
11	4	4.5	7.5	6.6687	2.5051
12	4.9	4.2	7.4	7.0216	3.9534
13	1.7	3.5	6.2	5.5174	1.1423
14	4.7	4	7.3	6.9056	3.5496
15	1.8	3.4	6.2	5.5472	1.1759
16	1.7	2.9	6.2	5.4327	1.5852
17	0.8	3.1	3.9	5.0656	1.8617
18	0.8	3.3	3.5	5.0939	1.7169
19	0.8	3	3.5	5.0515	1.9482
20	3.2	3.6	3.2	6.1903	1.5814
21	3	3.9	7.2	6.1448	1.354
22	1.7	3.8	6.2	5.5597	1.048
23	1.5	3.9	6.2	5.486	1.0914

15. تنبؤ اسلوب كريكنك:

تم اخذ مواقع المشاهدات الحقيقية وقيمها في منطقة الدراسة وتطبيق العملية العشوائية المكانية التي لها النموذج المقترح اعلاه، ولغرض تطبيق المعادلة رقم (15) لا بد من حساب مصفوفة الاوزان λ وذلك من خلال المعادلة (16) ولقد تم حساب هذه المصفوفة وكذلك تم حساب تباين كريكنك لكل تنبؤ وفق المعادلة (17) وبالطريقة نفسها يتم حساب او تنبؤ بقية

المواقع المكانية الأخرى، والجدول (4) يبين القيم التنبؤية للكريكنا وكذلك تم حساب متوسط

$$mse=0.9297$$

الجدول 4: القيم التنبؤية للكريكنا

ت	u	v	z(x)	z^(x)	σ_k^2
24	4.5	4.2	7.3	7.1156	0.2277
25	1.5	3.1	6.1	5.6906	0.2542
26	1.3	5.1	5.8	5.4405	0.2533
27	1.1	5.4	5.6	5.2535	0.2075
28	1.2	4.4	5.4	5.4714	0.2509
29	1.4	4.2	5.3	5.6914	0.2505
30	3.2	3.9	7.1	5.384	0.234
31	1.6	3.5	6.2	5.9491	0.2607
32	1.8	3.1	6.1	6.0227	0.2565
33	1.8	3.3	6.2	6.0556	0.2614
34	1.8	2.9	6.1	5.9458	0.2474
35	1.1	5.1	5.8	5.4022	0.2446
36	1.5	4.9	5.6	5.4478	0.2432
37	1.4	5.4	5.2	5.3801	0.2135
38	1.4	4.7	5.2	5.5553	0.2471
39	1.7	2.8	6	5.8109	0.2373
40	1.5	3	6	5.6614	0.2516
41	2	3.3	6.1	6.0768	0.2456
42	0.8	4.5	5.9	5.0632	0.2197
43	1.3	4.9	5.6	5.4888	0.2534
44	1.2	5.2	5.6	5.4432	0.2492
45	1	4.4	5.2	5.3876	0.2468
46	1	4.2	5.1	5.3489	0.2411
47	0.7	3.1	3.9	4.2345	0.2275

ت	u	v	z(x)	z^(x)	σ_k^2
1	1.9	3.7	6.2	6.0141	0.2518
2	3.8	4.3	7.4	6.15	0.2204
3	1.5	3.7	6.2	5.8653	0.2587
4	1.4	3.9	6.2	5.7299	0.2584
5	4.5	4.4	7.3	7.036	0.2175
6	1.8	3.8	6.1	6.0081	0.2567
7	1.5	4	6.1	5.7972	0.2588
8	3	4	3.6	6.0741	0.236
9	3	5.1	3.4	5.3358	0.1641
10	3.3	4.9	3.4	5.6046	0.1909
11	4	4.5	7.5	6.3146	0.216
12	4.9	4.2	7.4	7.3989	0.1659
13	1.7	3.5	6.2	6.0362	0.2633
14	4.7	4	7.3	7.3026	0.195
15	1.8	3.4	6.2	6.0701	0.2623
16	1.7	2.9	6.2	5.8534	0.2532
17	0.8	3.1	3.9	4.3614	0.2407
18	0.8	3.3	3.5	4.6539	0.2312
19	0.8	3	3.5	4.5051	0.2283
20	3.2	3.6	3.2	6.6016	0.204
21	3	3.9	7.2	5.1883	0.238
22	1.7	3.8	6.2	5.9889	0.2607
23	1.5	3.9	6.2	5.8516	0.2622

نلاحظ أن متوسط مربع الخطأ mse في أسلوب كريكنا أقل من متوسط مربع الخطأ في أسلوب الانحدار وكذلك تباين التقدير (أي التنبؤ) في أسلوب كريكنا أقل بشكل ملحوظ من تباين التنبؤ في أسلوب الانحدار ، وهذا دليل واضح على أن أسلوب كريكنا أفضل من أسلوب الانحدار وعليه نعلم على تنبؤ أسلوب كريكنا وهذا يمثل نتيجة أساسية في سبب اعتماد التنبؤ في الإحصاء المكاني على أسلوب الكريكنا .

16. الاستنتاجات:

1. نلاحظ من خلال رسم منحني دالة الفايروكرام ان المنحني يستمر في الصعود فهذا دليل على ان العملية العشوائية المكانية غير مستقرة.
2. نتائج التنبؤ (التقدير) في الكريكنك أفضل من نتائج التقدير في الانحدار وذلك لان تباين التنبؤ للكريكنك اقل بشكل ملحوظ من تباين التنبؤ للانحدار وكذلك متوسط مربع الخطأ في الكريكنك اقل من متوسط مربع الخطأ للانحدار وعليه يكون الأفضل دائما استخدام أسلوب الكريكنك في التنبؤ عن العملية العشوائية المكانية .

17. التوصيات :

1. يمكن التوسع بهذه الدراسة مستقبلا وذلك بادخال عوامل اخرى مثل (الزمن ، درجة الحرارة ، الامطار)، او عوامل لها علاقة بارتفاع وانخفاض مستويات المياه الجوفية.
2. يمكن التنبؤ عن ظاهرتين في نفس الوقت قد يكون مستوى ارتفاع منسوب المياه الجوفية وتركيز الأملاح في هذه المياه، وهذا ما يعرف بإسلوب كريكنك المشترك Cokriging Technique أو أسلوب كريكنك متعدد المتغيرات .

18. المصادر:

1. خضير، بشار طه (2011): التنبؤ بواسطة الانحدار والكريكنك للبيانات المكانية مع التطبيق، رسالة ماجستير غير منشورة في الرياضيات، جامعة الموصل كلية التربية.
2. المحسن، اسباهية يونس (1985) : " المياه الجوفية في منطقة سنجار واستثماراتها " ، رسالة ماجستير (غير منشورة) في الجغرافية الطبيعية ، جامعة بغداد ، كلية الآداب.
3. Boogaart, K.G. (1999): " New Possibility for Modeling Variograms In Complex Geology " , to Appear In Proc. of Stat GIS 1999.
4. Cressie, N., (1993). Statistic, for Spatial Data. J. Wiley, New York Second Edition.
5. Diggle, P.J. and Ribeiro, P.J., (2007). Model-based Geostatistics. Springer. Berlin. London.
6. Dubrule, O., (2003). Geostatistics for Seismic Data Integration in Earth Models, America.
7. Goovaerts, P., (1997). Geostatistics for Natural Resource Evaluation, Oxford University Press, Oxford.
8. Journel, A.G., (1986). "Geostatistics Models and tools for the Earth Sciences", Mathematical Geology, No. 18, PP. (119-140).
9. Krige, D.G., (1951). A Statistical Approach to Some Mine Valuation and Allied Problems at the Witwatersrand? Unpublished M. Sc. Thesis University of the Witwatersrand, Johannesburg (C.T) Historical Thesis.
10. Rao, C.R., and Kleffe, J., (1988). Estimation of Variance Components and Application. S. North-Holland, New York.
11. Stein, M.L., (1999). Interpolation of Spatial Data : Some Theory for Kriging, Springer, New York.