

الحل العددي وتحليل الأستقرارية العددية لمعادلة Korteweg-de Vries-Burger

المعتصم عبد المحسن البكر

إخلاص سعد الله الراوي

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

الملخص

تم عرض الحل العددي لمعادلة Korteweg-de Vries-Burger (KdV-B) باستخدام طريقتين من طرائق الفروقات المنتهية ، الطريقة الصريحة (explicit scheme) وطريقة Crank-Nicholson. دقة الحلول المحسوبة اختبرت بالمقارنة مع الحل المضبوط باستخدام مثال ، وقد تبين أن الطريقة الصريحة هي الأسهل بينما طريقة Crank-Nicholson أكثر دقة وأسرع تقارب . كذلك تمت دراسة الأستقرارية العددية للطريقتين باستخدام طريقة Fourier(Von Neumann) إذ تبين أن الطريقة الصريحة مستقرة تحت الشرط  $k \leq (vh^2 / 2(v^2 + \frac{m^2}{h^2}))$  بينما طريقة Crank-Nicholson مستقرة بدون شرط.

**Numerical Solution and Stability Analysis of  
Korteweg-de Vries-Burger Equation**

**ABSTRACT**

Numerical Solution of Korteweg-de Vries-Burger (KdV-B) equation is presented using two finite difference methods ,the explicit scheme and Crank-Nicholson scheme. The accuracy of computed solutions is examined by comparison with analytical solution using example , and the results were found to be , the explicit scheme is simpler while the Crank-Nicholson is more accurate and has faster convergent . Also , the stability analysis of the two methods by using Fourier (Von Neumann) method has been done and the results were found to be , the explicit scheme is stable under the condition  $k \leq (vh^2 / 2(v^2 + \frac{m^2}{h^2}))$  and the Crank-Nicholson is unconditionally stable.

درس العديد من الباحثين معادلة Korteweg-de Vries–Burger وتكتب اختصاراً (KdV-B). تشكل هذه المعادلة نموذج الانتشار (dispersion) والتبدد (أو التشتيت (dissipation) وغير الخطي [2]. من المعروف جيداً أن الكثير من الظواهر الفيزيائية الطبيعية يمكن أن توصف باستخدام هذه المعادلة. من الأمثلة التطبيقية على المعادلة، شروط سلوك الموجات الطويلة في الماء والموجات الضحلة في البلازما. كما أنها تلائم نمط موجة لاخطية لمائع في أنبوب مطاطي، والمائع مضطرب بفعل فقاعات صغيرة تتحرك بداخله. هذه المعادلة تعتبر تعميم ذو بعد واحد للوصف النموذجي لحقول السرعة والكثافة اللذان يأخذان في الحسبان قوة الضغط بالإضافة إلى اللزوجة والتفرق، قد تكون معادلة KdV-B أداة أكثر مرونة للفيزيائيين من معادلة Burger [6]. في [10] اعتبرنا مسألة الإستقرار الآسي الشامل باستخدام حدود التغذية الإسترجاعية لمعادلة KdV-Burger على الفترة [0,1]. في [1] أقرح الباحث قانون سيطرة أكثر دقة والذي أوجد الحل وأثبت الوجود و الإستقرارية لحل حدود السيطرة الناتج لمعادلة KdV-Burger. في [3] قدم الباحث طريقة Decomposition جديدة نسبياً لإيجاد الحلول الصريحة والحلول العددية لكل من معادلة KdV، معادلة Burger's ومعادلة KdV-B. في [6] كرس الباحثين دراسة معادلة KdV-B وتطبيق طريقة الفروقات المنتهية مع الشبكة المتغيرة مع طريقة شبه التحليلية لـ Adomain decomposition. في [2] قدم الباحث حلول عددية لمعادلة KdV-Burger باستخدام متعددات حدود Bernstein المعدلة.

في هذا البحث قمنا بحل معادلة KdV-Burger باستخدام طريقتين من طرائق الفروقات المنتهية هما الطريقة الصريحة وطريقة Crank-Nicholson سيتم معالجة الطريقتين لإيجاد الحل لهذه المعادلة بسبب إحتوائها على المشتقة الثالثة في حدودها ومقارنة النتائج مع الحل التحليلي. أيضاً سيتم دراسة تحليل إستقرارية الحل العددي لكل من الطريقتين.

## 2. النموذج الرياضي:

إن صيغة معادلة Korteweg-de Vries – Burger تكون بالشكل الآتي: [8]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + e u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \dots(1)$$

حيث أن  $m, v, e$  معاملات ثوابت والشروط الابتدائي هو

$$u(x,0) = u_0(x)$$

والشروط الحدودية هي

$$\left. \begin{aligned} u(a, t) = b_1, \quad u(b, t) = b_2, \quad t \geq 0 \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u_{xx}(a, t) = u_{xx}(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

وأن  $u_0(x)$  هي دالة مقيدة. والمعادلة (1) تمثل الشروط الحدودية عند نهايتي الفترة  $[a, b]$  المراد إيجاد الحل العددي عندها. الحد الثاني من المعادلة (1) يمثل الحد غير الخطي، والحد الثالث يمثل خاصية الانتشار والأخير يمثل التقريب أو التبديد. وكحالات محددة لمعادلة KdV- B تصبح معادلة KdV عندما تكون  $v \rightarrow 0$  ومعادلة Burger عندما  $m \rightarrow 0$ .

### 3. الحل العددي:

كون المعادلة تحوي في حدودها المشتقة الثالثة لذلك سيتم أتباع أسلوب جديد في الحل العددي وسنحتاج إلى استخدام المعادلات الفرقية التالية:

أ. التقريبات المركزية

$$u_x(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2.h} \dots (3)$$

$$u_{xx}(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \dots (4)$$

$$u_{xxx}(x_i, y_j) = \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2.h^3} \dots (5)$$

ب. التقريبات العددية التقدمة والخلفية ذات الرتبة الثانية (تسمى تقريبات عددية من طرف

واحد)[4]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-3u_i^j + 4u_{i+1}^j - u_{i+2}^j}{2h} \dots (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3u_i^j - 4u_{i-1}^j + u_{i-2}^j}{2h} \dots (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2u_i^j - 5u_{i+1}^j + 4u_{i+2}^j - u_{i+3}^j}{h^2} \dots (8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2u_i^j - 5u_{i-1}^j + 4u_{i-2}^j - u_{i-3}^j}{h^2} \dots (9)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{-5u_i^j + 18u_{i+1}^j - 24u_{i+2}^j + 14u_{i+3}^j - 3u_{i+4}^j}{2h^3} \dots (10)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{5u_i^j - 18u_{i-1}^j + 24u_{i-2}^j - 14u_{i-3}^j + 3u_{i-4}^j}{2h^3} \dots (11)$$

ج. التقريبات المركزية من الرتبة الرابعة  $O(h^4)$  لكل من المشتقة الأولى والثانية: [4]

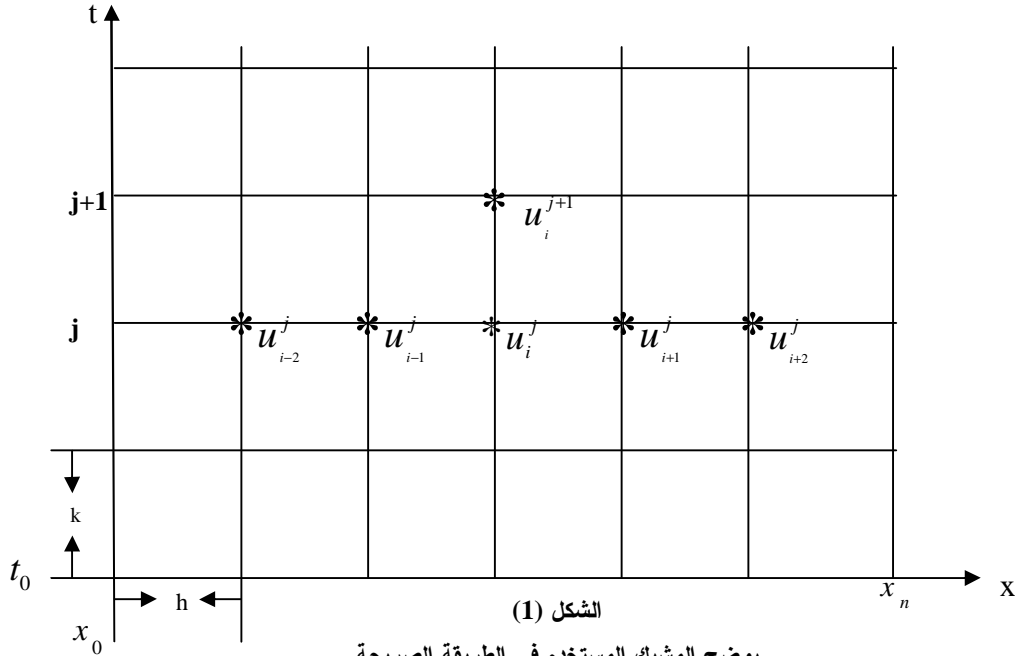
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-u_{i+2}^j + 8.u_{i+1}^j - 8.u_{i-1}^j + u_{i-2}^j}{12h} \dots (12)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-u_{i+2}^j + 16.u_{i+1}^j - 30.u_i^j + 16.u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{12h^2} \dots (13)$$

### 3-1. اشتقاق صيغة الطريقة الصريحة (Explicit Scheme) لمعادلة KdV-Burger

نقسم المستطيل  $R = \{(x,t) : a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq c\}$  إلى  $n-1$  و  $m-1$  من المستطيلات

طول ضلع كل منها  $(\Delta t = k)$  و  $(\Delta x = h)$  [9] وكما في الشكل (1):



تبدأ الحسابات من الصف الأول  $t = t_0 = 0$  إذ تحتسب قيم الحل من الشرط الابتدائي للمسألة  
 $u(x_i, t_0) = u_0(x)$  ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

ثم يتم توضيح حساب التقريبات لـ  $u(x, t)$  عند نقاط المشبك للصفوف الأخرى  
 $\{ u(x_i, t_j) : i = 1, 2, \dots, n-1, j = 1, 2, \dots, m \}$

وأسلوب الحل الجديد هو الآتي:

لحساب القيمة التقريبية للحل  $u(x_i, t_j)$  عندما  $i=1$  نستخدم المعادلات الفرقية

التقدمية (Forward Finite Difference equations) أي نعوض المعادلات (6)، (8) و (10)

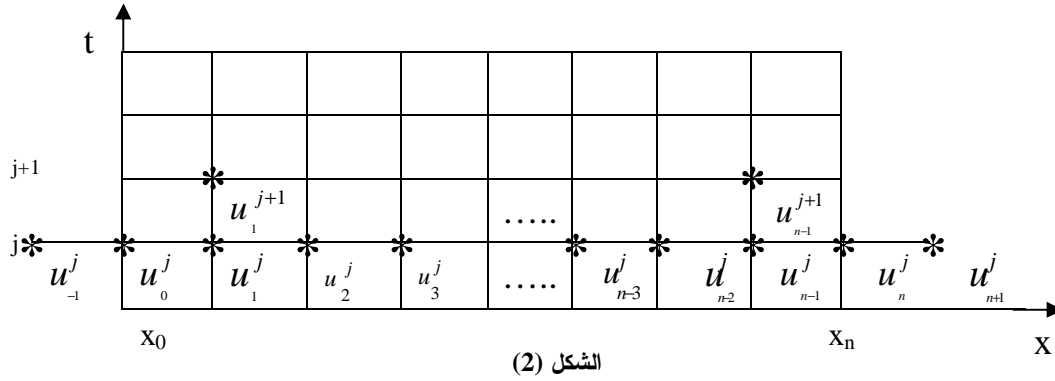
ونعوضها في المعادلة (1) نحصل على

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} + e u_i^j \left[ \frac{-3u_i^j + 4u_{i+1}^j - u_{i+2}^j}{2h} \right] - v \left[ \frac{2u_i^j - 5u_{i+1}^j + 4u_{i+2}^j - u_{i+3}^j}{h^2} \right] + m \left[ \frac{-5u_i^j + 18u_{i+1}^j - 24u_{i+2}^j + 14u_{i+3}^j - 3u_{i+4}^j}{2h^3} \right] = 0$$

بفرض أن  $r = k/h^2$  وإعادة ترتيب المعادلة أعلاه يكون لدينا

$$u_i^{j+1} = \left[ 1 + \frac{3.r.h.e}{2} u_i^j + 2rv + \frac{5.r}{2h} m \right] u_i^j + \left[ -2.r.h.e.u_i^j - 2.r.v - \frac{9.r}{h} m \right] u_{i+1}^j + \left[ \frac{r.h.e}{2} u_i^j + 2rv + \frac{12.r}{h} m \right] u_{i+2}^j + \left[ -rv - 7\frac{r}{h} m \right] u_{i+3}^j + \frac{3.r}{2h} m u_{i+4}^j \dots(14)$$

إن المعادلة (14) تمثل تقريب الفروقات المنتهية عند النقطة  $x_1$  من المشبك باستخدام الطريقة الصريحة لمعادلة KdV-Burger. وكما موضح في الشكل (2)



يوضح الحل عند النقطة التي تقع خارج منطقة الحل عند حساب  $u_1^{j+1}$  و  $u_{n-1}^{j+1}$  بالطريقة الصريحة

ولإيجاد بقية القيم التقريبية  $u(x_i, t_j)$  حيث  $i=2,3,\dots,n-2$  في نفس الصف نعوض المعادلات (3)، (4) و (5) في المعادلة (1) لنحصل على:

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{r.h.e}{2} u_i^j [u_{i+1}^j - u_{i-1}^j] + rv [u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j] - \frac{r.m}{2.h} [u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j]$$

إذ إن  $r = k/h^2$  وبإعادة ترتيب المعادلة أعلاه نحصل على

$$u_i^{j+1} = \left[ rv + \frac{r}{h} m \right] u_{i+1}^j - \frac{r}{2h} m u_{i+2}^j + \left[ 1 - \frac{rh}{2} e (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) - 2rv \right] u_i^j + \left[ rv - \frac{r}{h} m \right] u_{i-1}^j + \frac{r}{2h} m u_{i-2}^j \quad \dots (15)$$

إن المعادلة (15) تمثل تقريب الفروقات المنتهية باستخدام الطريقة الصريحة لمعادلة KdV-Burger حيث يتم حساب الصف  $j+1$  بواسطة القيم المعلومة للصف  $j$  عند نقاط المشبك  $i = 2, \dots, n-2$ ، إذ نلاحظ أن القيم المجهولة  $u_i^{j+1}$  يتم حسابها بشكل صريح بدلالة القيم المعلومة  $u_{i+1}^j, u_{i+2}^j, u_i^j, u_{i-1}^j, u_{i-2}^j$  وكما موضح في الشكل (1).

وأخيراً تحسب القيمة التقريبية  $u(x_i, t_j)$  عند  $i=n-1$  لنفس الصف وذلك بتعويض المعادلات الفرقية (7)، (9) و (11) وتعويضها في المعادلة (1) لنحصل على

$$u_{n-1}^{j+1} = \left[ 1 - \frac{3.r.h.e}{2} u_{n-1}^j + 2.r.v - \frac{5.r}{2h} m \right] u_{n-1}^j + \left[ 2.r.h.e.u_{n-1}^j - 5.r.v + \frac{9.r.m}{h} \right] u_{n-2}^j + \left[ -\frac{r.h}{2} e u_{n-1}^j + 4.r.v - \frac{12.r.m}{h} \right] u_{n-3}^j + \left[ -r.v + \frac{7.r.m}{h} \right] u_{n-4}^j - \frac{3.r.m}{2h} u_{n-5}^j \quad \dots (16)$$

$$r = k/h^2 \quad \text{إذ أن}$$

المعادلة (16) تحسب الحل عند النقطة  $x_{n-1}$  من المشبك. من ملاحظتنا للتقريب العددي المركزي للمشتقة الثالثة المتمثل بالمعادلة (15) نجد الحلين التقريبيين  $u_1^{j+1}$  و  $u_{n-1}^{j+1}$  المحسوبان عند العقدتين  $x_1$  و  $x_{n-1}$  من نقاط المشبك على التوالي يحويان قيم عند نقاط تقع خارج حدود

الحل (Focus) وغير معرفة هي  $u_{n+1}^j$  و  $u_{-1}^j$  ولا يمكن استخدام الشروط الحدودية فيها كون أن النقطة التي يراد حسابها لا تقع على الشرط الحدودي وكما بينا في الشكل(2).

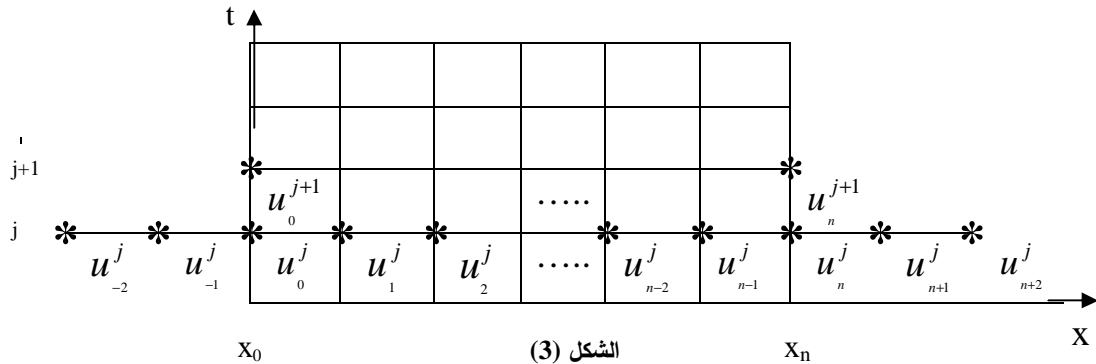
### 3-1-1 الشروط الحدودية

ذكرنا في البند (2) النموذج الرياضي لمعادلة KdV-Burger والشروط الحدودية للمعادلة والمتمثلة بالمعادلة (2) عندما  $x = a$  و  $x = b$ . ولتقريب الشروط الحدودية باستخدام

الطريقة الصريحة نحتاج إلى تعريف النقاط  $x_{-2}, x_{-1}, x_{n+1}, x_{n+2}$  كما يلي:

$$x_{-2} = x_0 - 2\Delta x, x_{-1} = x_0 - \Delta x, x_{n+1} = x_n + \Delta x, x_{n+2} = x_n + 2\Delta x$$

إذ أن هذه النقاط تقع خارج الشبكة وكما في الشكل (3):



(3) الشكل

يوضح النقاط التي تقع خارج المشبك في المستويين  $j$  و  $j+1$

الآن باستخدام الفروقات المركزية للشرط الحدودي الأول

$$\frac{\partial u(a, t)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(b, t)}{\partial x} = 0$$

وباستخدام المعادلة (3) للمشتقة الأولى عندما  $i=0$  نحصل على

$$\frac{u_{0+1}^j - u_{0-1}^j}{2.h} = 0$$

$$u_1^j = u_{-1}^j$$

...(17)

وعندما  $i=n$  نحصل على

$$\frac{u_{n+1}^j - u_{n-1}^j}{2.h} = 0$$

$$u_{n+1}^j = u_{n-1}^j$$

...(18)

والآن بالنسبة للتقريب العددي للشرط الحدودي الثاني

$$\frac{\partial^2 u(a, t)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u(b, t)}{\partial x^2} = 0$$

وباستخدام المعادلة (13) للمشتقة الثانية عندما  $i=0$  وبتعويض المعادلة (17) نحصل على:

$$u_{-2}^j = 32 u_1^j - 30 u_0^j - u_2^j \quad \dots(19)$$

وبنفس الأسلوب عندما  $i=n$  نحصل على

$$u_{n+2}^j = 32 u_{n-1}^j - 30 u_n^j - u_{n-2}^j \quad \dots(20)$$

نعوض كل من المعادلتين (17) و (19) في المعادلة (15) عندما  $i=0$  نحصل على المعادلة (21) بعد التبسيط:

$$u_0^{j+1} = \left[ 1 - 2rv - \frac{15 \cdot r}{h} m \right] u_0^j + \left[ 2rv + \frac{16 \cdot r}{h} m \right] u_1^j - \frac{r}{h} m u_2^j \quad \dots(21)$$

ونعوض كل من المعادلتين (18) و (20) في المعادلة (15) عندما  $i=n$  فنحصل على:

$$u_n^{j+1} = \left[ 1 - 2rv + \frac{15 \cdot r}{h} m \right] u_n^j + \left[ 2rv - \frac{16 \cdot r}{h} m \right] u_{n-1}^j + \frac{r}{h} m u_{n-2}^j \quad \dots(22)$$

### 3-2 اشتقاق صيغة طريقة Crank-Nicholson لمعادلة KdV-Burger

اكتشفت هذه الطريقة في عام 1947م من قبل العالمين جون كرانك و فايلس نيكلسون

(John Crank and Phyllis Nicholson) وفي هذه الطريقة يتم التعويض عن المشتقات

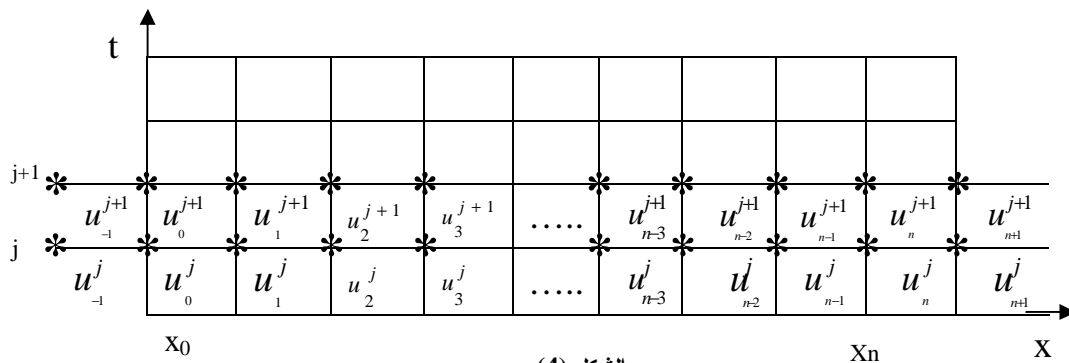
الجزئية الأولى  $u_x$  والثانية  $u_{xx}$  والثالثة  $u_{xxx}$  بالمعدل الحسابي لتقريبات الفروقات المركزية لها

عند الزمن  $(j)$  و  $(j+1)$  وتقريب الدالة  $u(x,t)$  بالمقدار  $u(x_i, t_j)$  وكتابتها اختصاراً  $u_i^{j+1}$ .

لإيجاد الحل بهذه الطريقة نتبع الأسلوب الجديد وهو أن يتم حساب الحل  $u_1^{j+1}$  باستخدام المعدل

الحسابي للمعادلات الفرقية التقدمية (Forward Finite Differences equations) أي

المعادلة (6)، (8) و (10) ويتم تعويضها في المعادلة (1) وكما مبين في الشكل (4) لنحصل على :



يوضح الحل عند النقطة التي تقع خارج منطقة الحل عند حساب  $u_1^{j+1}$  و  $u_{n-1}^{j+1}$  بطريقة Crank-Nicholson

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - \frac{3.r.h.e}{4} u_i^j - r.v - \frac{5.r.m}{4h} \right] u_i^{j+1} + \left[ r.h.e u_i^j + \frac{5}{2} r.v + \frac{9.r.m}{2h} \right] u_{i+1}^{j+1} + \left[ -\frac{r.h.e}{4} u_i^j - 2r.v - \frac{6.r.m}{h} \right] u_{i+2}^{j+1} \\ & + \left[ \frac{r.v}{2} + \frac{7.m.r}{2h} \right] u_{i+3}^{j+1} - \frac{3.r.m}{4h} u_{i+4}^{j+1} = \left[ 1 + \frac{3}{4} r.h.e u_i^j + r.v + \frac{5.r.m}{4h} \right] u_i^j + \left[ -r.h.e u_i^j - \frac{5}{2} r.v - \frac{9.r.m}{2h} \right] u_{i+1}^j \\ & + \left[ \frac{r.h.e}{4} u_i^j + 2r.v + \frac{6.m.r}{h} \right] u_{i+2}^j + \left[ -\frac{r.v}{2} - \frac{7.m.r}{2h} \right] u_{i+3}^j + \frac{3.r.m}{4h} u_{i+4}^j \quad \dots(23) \end{aligned}$$

أما بالنسبة للحلول التقريبية لبقية نقاط المشبك في الصف الواحد أي  $u(x_i, t_{j+1})$  حيث  $i = 2, 3, \dots, n-2$  فإخذ المعدل الحسابي لكل من المعادلات (3)، (4)، و (5) وتعويضها بالمعادلة (1) لنحصل على :

$$\begin{aligned} & -\frac{r.m}{4h} u_{i-2}^{j+1} + \left[ -\frac{r.h.e}{2} u_i^j - \frac{r.v}{2} + \frac{r.m}{2h} \right] u_{i-1}^{j+1} + [1 + r.v] u_i^{j+1} \\ & + \left[ \frac{r.h.e}{2} u_i^j - \frac{r.v}{2} - \frac{r.m}{2h} \right] u_{i+1}^{j+1} + \frac{r.m}{4h} u_{i+2}^{j+1} = \frac{r}{4h} m u_{i-2}^j + \left[ \frac{r.h.e}{2} u_i^j + \frac{r.v}{2} - \frac{r.m}{2h} \right] u_{i-1}^j \\ & + [1 - r.v] u_i^j + \left[ -\frac{r.h.e}{2} u_i^j + \frac{r.v}{2} + \frac{r.m}{2h} \right] u_{i+1}^j - \frac{r.m}{4h} u_{i+2}^j \quad \dots(24) \end{aligned}$$

حيث أن  $r = k/h^2$

نلاحظ من المعادلة (24) أن الطرف الأيسر يتضمن خمسة قيم غير معلومة لدالة (u) عند الخطوة الزمنية الجديدة (j+1)، في حين أن الطرف الأيمن يحوي على قيم كلها معلومة عند الخطوة الزمنية (j)، لذلك فإن المعادلة (24) تستخدم لإيجاد قيم نقاط الشبكة  $x_i, i = 2, 3, \dots, n-2$  للخطوة الزمنية الجديدة بدلالة القيم المعلومة من الخطوة الزمنية السابقة.

أما الحل  $u_{n-1}^{j+1}$  عند النقطة  $x_{n-1}$  فيتم حسابه بأخذ المعدل الحسابي للمعادلات (7)، (9) و (11) وتعويضها في المعادلة (1) وبعد التبسيط نحصل على

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{3.r.h.e}{4} u_{n-1}^j - r.v - \frac{5.r.m}{4h} \right] u_{n-1}^{j+1} + \left[ -r.h.e u_{n-1}^j + \frac{5.r.v}{2} - \frac{9.r.m}{2h} \right] u_{n-2}^{j+1} + \left[ r.h.e u_{n-1}^j - 2r.v + \frac{6.r.m}{h} \right] u_{n-3}^{j+1} \\ & + \left[ \frac{r.v}{2} - \frac{7.r.m}{2h} \right] u_{n-4}^{j+1} + \frac{3.r.m}{4h} u_{n-5}^{j+1} = \left[ 1 - \frac{3}{4} r.h.e u_{n-1}^j + r.v - \frac{5.r.m}{4h} \right] u_{n-1}^j + \left[ r.h.e u_{n-1}^j - \frac{5.r.v}{2} + \frac{9.r.m}{2h} \right] u_{n-2}^j \\ & + \left[ -\frac{r.h.e}{4} u_{n-1}^j + 2r.v - \frac{6.r.m}{h} \right] u_{n-3}^j + \left[ -\frac{r.v}{2} + \frac{7.r.m}{2h} \right] u_{n-4}^j - \frac{3.r.m}{4h} u_{n-5}^j \quad \dots(25) \end{aligned}$$

إذاً المعادلات (23)، (24) و (25) هي تقريبات الحلول بالفروقات المنتهية لطريقة Crank-Nicholson وهذه المعادلات تؤدي إلى تكوين نظام جبري خماسي الأقطار بقي أي أن نجد الحل عند حدي الشبكة بهذه الطريقة .

### 3-2-1. الشروط الحدودية

إن تقريب المشتقات في الشروط الحدودية يكون بواسطة الفروقات المركزية . باستخدام المعادلة (3) للمشتقة الأولى في الشرط الحدودي الأول عندما  $i=0$  نحصل على

$$u_1 = u_{-1} \quad \dots(26)$$

وعندما  $i=n$  نحصل على

$$u_{n+1} = u_{n-1} \quad \dots(27)$$



بالنسبة للتقريب العددي للشرط الحدودي الثاني وباستخدام المعادلة (13) للمشتقة الثانية عندما

$i=0$  وبتعويض المعادلة (27) ينتج

$$u_{-2} = 32u_1 - 30u_0 - u_2 \quad \dots(28)$$

وعندما  $i=n$  نحصل على

$$u_{n+2} = 32 u_{n-1} - 30 u_n - u_{n-2} \quad \dots(29)$$

نعوض كل من المعادلتين (26) و (28) في المعادلة (24) عندما  $i=0$  نحصل على:

$$\begin{aligned} & \left[1 + vr + \frac{15.r.m}{2h}\right] u_i^{j+1} - \left[vr + \frac{8.r.m}{h}\right] u_{i+1}^{j+1} + \frac{r.m}{2h} u_{i+2}^{j+1} \\ & = \left[1 - vr - \frac{15.r.m}{2h}\right] u_i^j + \left[vr + \frac{8.r.m}{h}\right] u_{i+1}^j - \frac{r.m}{2h} u_{i+2}^j \end{aligned} \quad \dots(30)$$

ونعوض كل من المعادلتين (27) و (29) في المعادلة (24) عندما  $i=n$  نحصل على

$$\begin{aligned} & \left[1 + vr - \frac{15.r.m}{2h}\right] u_i^{j+1} + \left[-vr + \frac{8.r.m}{h}\right] u_{i-1}^{j+1} - \frac{r.m}{2h} u_{i-2}^{j+1} \\ & = \left[1 - vr + \frac{15.r.m}{2h}\right] u_i^j + \left[vr - \frac{8.r.m}{h}\right] u_{i-1}^j + \frac{r.m}{2h} u_{i-2}^j \end{aligned} \quad \dots(31)$$

إذن التقريب العددي لمعادلة KdV-Burger مع الشروط الحدودية والابتدائية وباستخدام

طريقة Crank-Nicholson يتمثل بالمعادلات التالية :

$$u_i^0 = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\begin{aligned} & \left[1 + vr + \frac{15.r.m}{2h}\right] u_i^{j+1} - \left[vr + \frac{8.r.m}{h}\right] u_{i+1}^{j+1} + \frac{r.m}{2h} u_{i+2}^{j+1} \\ & = \left[1 - vr - \frac{15.r.m}{2h}\right] u_i^j + \left[vr + \frac{8.r.m}{h}\right] u_{i+1}^j - \frac{r.m}{2h} u_{i+2}^j, \quad i = 0 \forall j \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{3.r.h.e}{4} u_i^j - rv - \frac{5.r.m}{4h}\right] u_i^{j+1} + \left[r.h.e u_i^j + \frac{5}{2}rv + \frac{9.r.m}{2h}\right] u_{i+1}^{j+1} + \left[-\frac{r.h.e}{4} u_i^j - 2rv - \frac{6.r.m}{h}\right] u_{i+2}^{j+1} \\ & + \left[\frac{r}{2}v + \frac{7.m.r}{2h}\right] u_{i+3}^{j+1} - \frac{3.r.m}{4h} u_{i+4}^{j+1} = \left[1 + \frac{3}{4}r.h.e u_i^j + rv + \frac{5.r.m}{4h}\right] u_i^j + \left[-r.h.e u_i^j - \frac{5}{2}rv - \frac{9.r.m}{2h}\right] u_{i+1}^j \\ & + \left[\frac{r.h.e}{4} u_1^j + 2rv + \frac{6.m.r}{h}\right] u_{i+2}^j + \left[-\frac{r}{2}v - \frac{7.m.r}{2h}\right] u_{i+3}^j + \frac{3.r.m}{4h} u_{i+4}^j, \quad i = 1, \forall j \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{r.m}{4h} u_{i-2}^{j+1} + \left[-\frac{r.h.e}{2} u_i^j - \frac{r.v}{2} + \frac{r.m}{2h}\right] u_{i-1}^{j+1} + [1 + rv] u_i^{j+1} + \left[\frac{r.h.e}{2} u_i^j - \frac{r.v}{2} - \frac{r.m}{2h}\right] u_{i+1}^{j+1} \\ & + \frac{r.m}{4h} u_{i+2}^{j+1} = \frac{r}{4h} m u_{i-2}^j + \left[\frac{r.h.e}{2} u_i^j + \frac{r.v}{2} - \frac{r.m}{2h}\right] u_{i-1}^j + [1 - rv] u_i^j \\ & + \left[-\frac{r.h.e}{2} u_i^j + \frac{r.v}{2} + \frac{r.m}{2h}\right] u_{i+1}^j - \frac{r.m}{4h} u_{i+2}^j, \quad i = 2, \dots, n-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{3.r.h.e}{4} u_{n-1}^j - rv - \frac{5.r.m}{4h}\right] u_{n-1}^{j+1} + \left[-r.h.e u_{n-1}^j + \frac{5.r.v}{2} - \frac{9.r.m}{2h}\right] u_{n-2}^{j+1} + \left[r.h.e u_{n-1}^j - 2rv + \frac{6.r.m}{h}\right] u_{n-3}^{j+1} \\ & + \left[\frac{r.v}{2} - \frac{7.r.m}{2h}\right] u_{n-4}^{j+1} + \frac{3.r.m}{4h} u_{n-5}^{j+1} = \left[1 - \frac{3}{4}r.h.e u_{n-1}^j + rv - \frac{5.r.m}{4h}\right] u_{n-1}^j + \left[r.h.e u_{n-1}^j - \frac{5.r.v}{2} + \frac{9.r.m}{2h}\right] u_{n-2}^j \\ & + \left[-\frac{r.h.e}{4} u_{n-1}^j + 2rv - \frac{6.r.m}{h}\right] u_{n-3}^j + \left[-\frac{r.v}{2} + \frac{7.r.m}{2h}\right] u_{n-4}^j - \frac{3.r.m}{4h} u_{n-5}^j, \quad i = n-1, \forall j \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[1 + vr - \frac{15.r.m}{2h}\right] u_n^{j+1} + \left[-vr + \frac{8.r.m}{h}\right] u_{n-1}^{j+1} - \frac{r.m}{2h} u_{n-2}^{j+1} \\ & = \left[1 - vr + \frac{15.r.m}{2h}\right] u_n^j + \left[vr - \frac{8.r.m}{h}\right] u_{n-1}^j + \frac{r.m}{2h} u_{n-2}^j, \quad i = n \ \& \ \forall j \geq 0 \end{aligned}$$

#### 4. تحليل الأستقرارية:

عند حل أية معادلة تفاضلية جزئية عددياً بطرائق الفروقات المنتهية باستخدام طريقة Fourier (Von-Neumann) فإن كل نقطة من نقاط الشبكة  $u_n^m$  يمكن التعبير عنها بالصيغة  $y(t).e^{iax}$  حيث أن  $i = \sqrt{-1}$  و  $b$  هو ثابت موجب. [9]

#### 4-1. تحليل الأستقرارية العددية للطريقة الصريحة باستخدام طريقة Fourier (Von-Neumann)

إن دراسة الأستقرارية العددية للطريقة الصريحة لمعادلة KdV-Burger باستخدام طريقة Fourier Von Neumann تكون كما يلي :

عند العقدة الثانية من المشبك ( $n=1$ ) نستخدم المعادلات الفرقية التالية :

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{k} = v \left[ \frac{2u_n^m - 5u_{n+1}^m + 4u_{n+2}^m - u_{n+3}^m}{h^2} \right] - m \left[ \frac{-5u_n^m + 18u_{n+1}^m - 24u_{n+2}^m + 14u_{n+3}^m - 3u_{n+4}^m}{2h^3} \right] \quad \dots(32)$$

$n=1$

نعوض عن  $u_n^m$  بـ  $y(t).e^{iax}$  إذ أن  $i = \sqrt{-1}$ ,  $a > 0$  فنحصل على:

$$\frac{y(t+k).e^{iax} - y(t).e^{iax}}{k} = v \left[ \frac{2y(t).e^{iax} - 5y(t).e^{ia(x+h)} + 4y(t).e^{ia(x+2h)} - y(t).e^{ia(x+3h)}}{h^2} \right] - m \left[ \frac{-5y(t).e^{iax} + 18y(t).e^{ia(x+h)} - 24y(t).e^{ia(x+2h)} + 14y(t).e^{ia(x+3h)} - 3y(t).e^{ia(x+4h)}}{2h^3} \right] \quad \dots(33)$$

بضرب طرفي المعادلة (33) بـ  $\frac{k}{e^{iax}}$  وفرض أن  $r = \frac{k}{h^2}$  نحصل على

$$\frac{y(t+k)}{y(t)} = 1 + v.r[2 - 5e^{iah} + 4e^{2iah} - e^{3iah}] + \frac{m.r}{2h} [5 - 18e^{iah} + 24e^{2iah} - 14e^{3iah} + 3e^{4iah}]$$

باستخدام مبرهنة مفكوك ذي الحدين [7] وبالتبسيط نحصل على

$$\frac{y(t+k)}{y(t)} = 1 + v.r \left[ (1 - e^{iah})^3 + (1 - e^{iah})^2 \right] + \frac{m.r}{2h} \left[ 3(1 - e^{iah})^4 + 2(1 - e^{iah})^3 \right]$$

$$= 1 + r.Y(1 - e^{iah})^3 + r.(1 - e^{iah})^2.(v + Z(1 - e^{iah})^2)$$

حيث أن  $Y = (v + \frac{m}{h})$  و  $Z = \frac{3.m}{2.h}$  بتبسيط المعادلة أعلاه نحصل على

$$\frac{y(t+k)}{y(t)} = 1 + r.Y(8.\sin^6(\frac{ah}{2}) - 12i.\sin(ah).\sin^4(\frac{ah}{2}) - 6.\sin^2(ah).\sin^2(\frac{ah}{2}) + i.\sin^3(ah)) + r.(4.\sin^4(\frac{ah}{2}) - 4i.\sin(ah).\sin^2(\frac{ah}{2}) - \sin^2(ah)).(v + Z(4.\sin^4(\frac{ah}{2}) - 4i.\sin(ah).\sin^2(\frac{ah}{2}) - \sin^2(ah))) = A + i.B = x$$

إذ أن  $x$  هو عامل التضخم (Amplification Factor) وأن :

$$A = 1 + 8.Y.r.\sin^6(\frac{ah}{2}) - 6.Y.r.\sin^2(ah).\sin^2(\frac{ah}{2}) - 24.r.Z.\sin^2(ah).\sin^4(\frac{ah}{2}) + 16.r.Z.\sin^8(\frac{ah}{2}) + 4.r.v.\sin^4(\frac{ah}{2}) - r.v.\sin^2(ah) + r.Z.\sin^4(ah)$$

$$B = \sin(ah).(-12.Y.r.\sin^4(\frac{ah}{2}) + Y.r.\sin^2(ah) - 4.r.v.\sin^2(\frac{ah}{2}) - 32.Z.r.\sin^6(\frac{ah}{2}) + 8.Z.r.\sin^2(ah).\sin^2(\frac{ah}{2}))$$

إن الشرط الضروري والكافي الأستقرارية العددية هو

$$\left| \frac{y(t + \Delta t)}{y(t)} \right| = x \leq 1$$

وبما أن  $x$  هو عدد عقدي . عليه فإن:

$$|x| = \sqrt{x \bar{x}} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

ولكي تكون  $|x| \leq 1$  من الضروري أن تكون  $A^2 + B^2 \leq 1$  وبأخذ  $\sin^2 \frac{ah}{2} = 1$  لبعض قيم  $ah$

وبفرض أن  $\sin^2 bk$  تأخذ أكبر قيمة (يعني واحد) [5]، عليه نحصل على

$$A^2 + B^2 = (1 - r \cdot (-2.Y + 7.Z - 3.v))^2 + r^2 \cdot (-11.v - 4.v - 24.Z)^2$$

وبالتعويض عن قيم  $Y$  و  $Z$  يكون لدينا:

$$\Rightarrow r \leq \frac{2 \cdot (-5.v + \frac{17.m}{2.h})}{(-5.v + \frac{17.m}{2.h})^2 + (15.v + \frac{47.m}{h})^2} \quad \dots(34)$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{2.h^2 \cdot (-5.v + \frac{17.m}{2.h})}{(-5.v + \frac{17.m}{2.h})^2 + (15.v + \frac{47.m}{h})^2} \quad \dots(35)$$

أما بالنسبة لعقد المشبك من العقدة الثالثة إلى العقدة 2-p نستخدم المعادلات الفرقية التالية:

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{k} = v \cdot \left[ \frac{u_{n+1}^m - 2.u_n^m - u_{n-1}^m}{h^2} \right] - m \cdot \left[ \frac{u_{n+2}^m - 2.u_{n+1}^m + 2.u_{n-1}^m - u_{n-2}^m}{2.h^3} \right], n = 2, \dots, p-2 \quad \dots(36)$$

وبالتعويض عن  $u_n^m$  بـ  $y(t) \cdot e^{iax}$  في المعادلة (36) وبعد التبسيط نحصل على

$$\frac{y(t+k)}{y(t)} = 1 - 4.v.r \cdot \sin^2\left(\frac{ah}{2}\right) + \frac{4.i.r.m}{h} \sin^2\left(\frac{ah}{2}\right) \sin(ah) = x$$

حيث

$$\left. \begin{aligned} x &= A + iB \\ A &= 1 - 4.m.r \cdot \sin^2\left(\frac{ah}{2}\right) \\ B &= 4 \frac{r.m}{h} \sin^2\left(\frac{ah}{2}\right) \sin(ah) \end{aligned} \right\} \quad \dots(37)$$

وبما أن  $x$  هو عدد عقدي. عليه فإن:

$$|x| = \sqrt{x \bar{x}} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

ولكي تكون  $|x| \leq 1$  من الضروري أن تكون  $A^2 + B^2 \leq 1$  أي أن

$$A^2 + B^2 = 1 - 8.v.r \cdot \sin^2\left(\frac{ah}{2}\right) + 16.r^2.v^2 \cdot \sin^4\left(\frac{ah}{2}\right) + \frac{16.r^2.m^2}{h^2} \sin^4\left(\frac{ah}{2}\right) \cdot \sin^2(ah) \quad \dots(38)$$

وبأخذ  $\sin^2 \frac{ah}{2} = 1$  لبعض قيم  $ah$  وبفرض أن  $\sin^2 bk$  تأخذ أكبر قيمة (يعني واحد) [5]، عليه

تصبح المعادلة (38) كما يلي:

$$r \leq \frac{v}{2.(v^2 + \frac{m^2}{h^2})}, \quad k \leq \frac{v.h^2}{2.(v^2 + \frac{m^2}{h^2})} \quad \dots(39)$$

وباستخدام نفس أسلوب دراسة إستقرارية الحل العددي عند العقدة  $n=1$  نحصل على شرط الأستقرارية عند العقدة  $n=p-1$  وهو

$$r \leq \frac{2 \cdot (-5 \cdot v - \frac{17 \cdot m}{2 \cdot h})}{(5 \cdot v + \frac{17 \cdot m}{2 \cdot h})^2 + (15 \cdot v - \frac{47 \cdot m}{h})^2} \quad \dots (40)$$

إذاً تكون الطريقة الصريحة لحل معادلة KdV-Burger مستقرة (stable) ضمن نقاط الشبكة  $n=2, \dots, p-2$  إذا تم اختيار الخطوة الزمنية  $k$  وخطوة الطول  $h$  بحيث تحقق القيد (39) وعند العقدة الثانية والعقدة  $p-1$  تكون الطريقة مستقرة تحت شرط تحقيق القيد في المعادلتين (35) و(40) وهذا يعتمد على اختيار قيم كل من  $h, v, m$ .

#### 4-2. الأستقرارية العددية لطريقة Crank-Nicholson باستخدام طريقة Fourier (Von-Neumann)

إن دراسة الأستقرارية العددية لطريقة Crank-Nicholson لمعادلة KdV-Burger باستخدام طريقة Von Neumann تكون كالآتي:  
عندما  $n=1$  نستخدم المعادلة الفرقية التالية:

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{k} = \frac{v}{2} \cdot \left[ \frac{2 \cdot u_n^{m+1} - 5 \cdot u_{n+1}^{m+1} + 4 \cdot u_{n+2}^{m+1} - u_{n+3}^{m+1}}{h^2} + \frac{2 \cdot u_n^m - 5 \cdot u_{n+1}^m + 4 \cdot u_{n+2}^m - u_{n+3}^m}{h^2} \right] - \frac{m}{2} \cdot \left[ \frac{-5 \cdot u_n^{m+1} + 18 \cdot u_{n+1}^{m+1} - 24 \cdot u_{n+2}^{m+1} + 14 \cdot u_{n+3}^{m+1} - 3 \cdot u_{n+4}^{m+1}}{2 \cdot h^3} + \frac{-5 \cdot u_n^m + 18 \cdot u_{n+1}^m - 24 \cdot u_{n+2}^m + 14 \cdot u_{n+3}^m - 3 \cdot u_{n+4}^m}{2 \cdot h^3} \right] \quad \dots (40)$$

$n = 1$

نعوض عن  $u_n^m$  بـ  $y(t) \cdot e^{iax}$  في المعادلة (40) فنحصل على :

$$\frac{y(t+k)}{y(t)} = \frac{1+v \cdot \frac{r}{2} \cdot [2-5e^{iah} + 4 \cdot e^{2iah} - e^{3iah}] + m \cdot \frac{r}{4 \cdot h} \cdot [5-18 \cdot e^{iah} + 24 \cdot e^{2iah} - 14 \cdot e^{3iah} + 3 \cdot e^{4iah}]}{1-v \cdot \frac{r}{2} \cdot [2-5e^{iah} + 4 \cdot e^{2iah} - e^{3iah}] - m \cdot \frac{r}{4 \cdot h} \cdot [5+18 \cdot e^{iah} + 24 \cdot e^{2iah} - 14 \cdot e^{3iah} + 3 \cdot e^{4iah}]}$$

باستخدام مبرهنة مفكوك ذي الحدين ينتج:

$$\frac{y(t+k)}{y(t)} = \frac{1 + \frac{v \cdot r}{2} \cdot [(1 - e^{iah})^3 + (1 - e^{iah})^2] + \frac{m \cdot r}{4 \cdot h} [3(1 - e^{iah})^4 + 2(1 - e^{iah})^3]}{1 - \frac{v \cdot r}{2} \cdot [(1 - e^{iah})^3 + (1 - e^{iah})^2] - \frac{m \cdot r}{4 \cdot h} [3(1 - e^{iah})^4 + 2(1 - e^{iah})^3]} \Rightarrow \frac{y(t+k)}{y(t)} = \frac{1 + \frac{r \cdot Y}{2} (1 - e^{iah})^3 + r \cdot (1 - e^{iah})^2 \cdot (\frac{v}{2} + \frac{Z}{2} (1 - e^{iah})^2)}{1 - \frac{r \cdot Y}{2} (1 - e^{iah})^3 + r \cdot (1 - e^{iah})^2 \cdot (-\frac{v}{2} - \frac{Z}{2} (1 - e^{iah})^2)} \quad \dots (41)$$

حيث  $Z = \frac{3 \cdot m}{2 \cdot h}$  و  $Y = (v + \frac{m}{h})$  والآن نعيد كتابة المعادلة (41) بالصيغة المبسطة التالية بعد

إجراء نفس العمليات المتبعة في إستقرارية الطريقة الصريحة لنحصل على :

$$\frac{Y(t + \Delta t)}{Y(t)} = \frac{A - i.B}{A_1 + i.B} \quad \dots(42)$$

حيث

$$A = 1 + 4.r.Y.\sin^6\left(\frac{ah}{2}\right) - 3.r.Y.\sin^2(ah).\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right) - 12.r.Z.\sin^2(ah).\sin^4\left(\frac{ah}{2}\right)$$

$$+ 8.r.Z.\sin^8\left(\frac{ah}{2}\right) + 2.r.v.\sin^4\left(\frac{ah}{2}\right) - \frac{r.v}{2}\sin^2(ah) + \frac{r.Z}{2}.\sin^4(ah)$$

$$A_1 = 1 - 4.r.Y.\sin^6\left(\frac{ah}{2}\right) + 3.r.Y.\sin^2(ah).\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right) + 12.r.Z.\sin^2(ah).\sin^4\left(\frac{ah}{2}\right)$$

$$- 8.r.Z.\sin^8\left(\frac{ah}{2}\right) - 2.r.v.\sin^4\left(\frac{ah}{2}\right) - \frac{v.r}{2}\sin^2(ah) - \frac{r.Z}{2}.\sin^4(ah)$$

$$B = \sin(ah).\left[6.r.Y.\sin^4\left(\frac{ah}{2}\right) - \frac{r.Y}{2}.\sin^2(ah) + 2.r.v.\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right)\right]$$

$$+ 16.r.Z.\sin^6\left(\frac{ah}{2}\right) - 4.r.Z.\sin^2(ah).\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right)]$$

لبعض قيم  $ah$  تكون  $\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right)$  قيمتها واحد وبفرض أن  $\sin^2 b k$  تأخذ أكبر قيمة (يعني واحد)

عليه

$$A = 1 + r.\left(\frac{5.v}{2} - \frac{17.m}{4h}\right)$$

$$A_1 = 1 + r.\left(\frac{5.v}{2} + \frac{17.m}{4h}\right)$$

$$B = r.\sin(ah).\left(\frac{15.v}{2} + \frac{47.m}{2.h}\right)$$

الآن باستخدام الشرط الضروري والكافي للاستقرارية العددية يعني أن  $|x| \leq 1$  ولكي تكون

$|x| \leq 1$  من الضروري أن تكون  $A < A_1$  بمعنى أن

$$1 + r.\left(\frac{5.v}{2} - \frac{17.m}{4h}\right) < 1 + r.\left(-\frac{5.v}{2} + \frac{17.m}{4h}\right)$$

لأن  $r > 0$  دائماً صحيحة

$$\Rightarrow \frac{5.v}{2} - \frac{17.m}{4h} < -\frac{5.v}{2} + \frac{17.m}{4h}$$

$$h < \frac{17.m}{10.v}$$

...(43)

الآن لدراسة الأستقرارية العددية للحل بالنسبة لعقد المشبك من العقدة الثالثة إلى العقدة

p-2 نستخدم المعادلة الفرقية التالية:

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{k} = \frac{v}{2} \left[ \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2.u_n^{m+1} - u_{n-1}^{m+1}}{h^2} + \frac{u_{n+1}^m - 2.u_n^m - u_{n-1}^m}{h^2} \right]$$

$$- \frac{m}{2} \left[ \frac{u_{n+2}^{m+1} - 2.u_{n+1}^{m+1} + 2.u_{n-1}^{m+1} - u_{n-2}^{m+1}}{2.h^3} + \frac{u_{n+2}^m - 2.u_{n+1}^m + 2.u_{n-1}^m - u_{n-2}^m}{2.h^3} \right] \quad \dots(44)$$

$$n = 2, \dots, p - 2$$

نعوض عن  $u_n^m$  بـ  $y(t).e^{iax}$  في المعادلة (3.21) وبعد التبسيط نحصل على

$$\frac{y(t+k)}{y(t)} = \frac{1 - 2.v.r.\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right) + \frac{2.r.i.m}{h}\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right)\sin(ah)}{1 + 2.m.r.\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right) - \frac{2.r.i.m}{h}\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right)\sin(ah)} = \frac{A + iB}{A_1 - iB} = x \quad \dots(45)$$

حيث

$$A = 1 - 2.v.r.\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right)$$

$$A_1 = 1 + 2.v.r.\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right)$$

$$B = \frac{2.r.m}{h}\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right)\sin(ah)$$

في المعادلة (45) نجد أن

$$|x| = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{A_1^2 + B^2}} = \sqrt{\frac{(1 - 2.v.r.\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right))^2 + \left(\frac{2.r.m}{h}\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right)\sin(ah)\right)^2}{(1 + 2.v.r.\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right))^2 + \left(\frac{2.r.m}{h}\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right)\sin(ah)\right)^2}} \quad \dots(46)$$

نلاحظ أن  $A < A_1$  عليه فإن  $|x| \leq 1$ .

وباستخدام نفس أسلوب دراسة إستقرارية الحل العددي عند العقدة  $n=1$  نحصل على

شرط الأستقرارية عند العقدة  $n=p-1$  وهو

$$h > -\frac{17.m}{10.v} \quad \dots(47)$$

بما أن خطوة الطول ( $h$ ) لا يمكن أن تكون سالبة. أي أن المتباينة (47) تؤدي إلى أن  $h > 0$  وهذه صحيحة دائماً. من ما سبق ينتج أن طريقة Crank-Nicholson تكون مستقرة وبدون شرط (unconditionally stable) على كل نقاط المشبك.

### 5. النتائج العددية:

في هذه الفقرة سنقدم النتائج العددية لكل من الطريقتين ونقارنها مع نتائج الحل التحليلي

لمعادلة KdV-B علماً أن الحل التحليلي للمعادلة هو

$$u(x, t) = \frac{12.v^2}{e.m} \left[ 1 - \frac{e^{\frac{2.v}{e.m}(x-wt)}}{(e^{\frac{v}{e.m}(x-wt)} + E)^2} \right], \quad w = \frac{12.v^2}{25.m}, \quad E = 1000$$

حيث أن  $E$  ثابت موجب [8]. وسيتم أخذ قيم المعلمات

$m=2, v=1, e=6, b_1=1, b_2=0, a=0, b=220$  مع خطوة الطول  $h=4.4$  وخطوة الزمن

$k=0.02$  والشرط الابتدائي

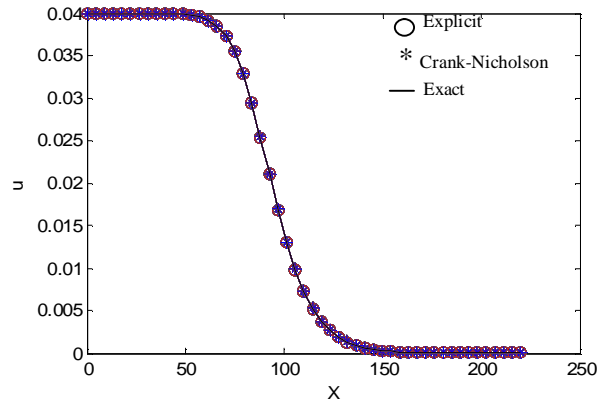
$$u(x, 0) = \frac{12.v^2}{e.m} \left[ 1 - \frac{e^{\frac{2.v.x}{e.m}}}{(e^{\frac{v.x}{e.m}} + E)^2} \right], \quad w = \frac{12.v^2}{25.m}, \quad E = 1000$$

جدول (1)

يوضح مقارنة عددية مع الحل التحليلي لمعادلة KdV-B عند الزمن  $t=0.3$

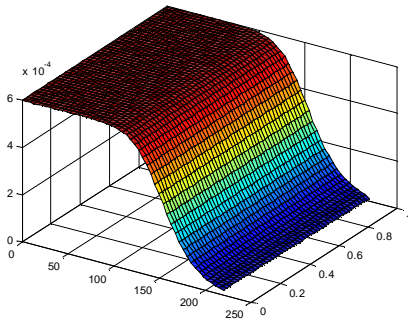
X	Exact solution	Explicit	Crank –Nicholson
0	0.039999960318446	0.039999955148289	0.039999955159623
4.4	0.039999917455490	0.039999916917152	0.039999917298841
8.8	0.039999828360065	0.039999831042243	0.039999828615391
13.2	0.039999643298937	0.039999648925799	0.039999643849634
17.6	0.039999259305798	0.039999270965322	0.039999260444376
22	0.039998463729635	0.039998487800572	0.039998466073458
26.4	0.039996818958375	0.039996868469135	0.039996823759595
30.8	0.039993429053020	0.039993530355763	0.039993438819987
35.2	0.039986473242929	0.039986678974430	0.039986492918280
39.6	0.039972290394539	0.039972703834823	0.039972329494921
44	0.039943630276347	0.039944449030829	0.039943706546412
48.4	0.039886445276387	0.039888034297712	0.039886590383112
52.8	0.039774353780204	0.039777354806152	0.039774621010196
57.2	0.039559966197731	0.039565433937697	0.039560438522562
61.6	0.039163381819971	0.039172896289629	0.039164175685396
66	0.038461556955463	0.038477198862063	0.038462812328880
70.4	0.037288467987453	0.037312501371842	0.037290307610848
74.8	0.035461635026268	0.035495806225642	0.035464071156986
79.2	0.032845195254650	0.032889801792040	0.032847994167581
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
136.4	0.000912851204663	0.000917413592494	0.000912391051058
140.8	0.000635995288886	0.000639196955007	0.000635668884972
145.2	0.000442393592640	0.000444631904708	0.000442163720484
149.6	0.000307380606630	0.000308941293698	0.000307219517598
154	0.000213405197478	0.000214491392745	0.000213292695451
158.4	0.000148080487635	0.000148835475892	0.000148002103495
162.8	0.000102713378867	0.000103237682647	0.000102658855086
167.2	0.000071226665812	0.000071590543220	0.000071188782121
171.6	0.000049383222098	0.000049635651094	0.000049356920732
176	0.000034234310793	0.000034409373222	0.000034216060549
180.4	0.000023730444277	0.000023851826805	0.000023717785384
184.8	0.000016448408533	0.000016532559025	0.000016439630248
189.2	0.000011400494581	0.000011458827490	0.000011394408394
193.6	0.000007901524316	0.000007941957736	0.000007897305151
198	0.000005476326366	0.000005504351512	0.000005473401740
202.4	0.000003795436251	0.000003814859260	0.000003793409063
206.8	0.000002630448955	0.000002643864196	0.000002629045329
211.2	0.000001823035575	0.000001832640413	0.000001822099396
215.6	0.000001263450962	0.000001284579391	0.000001262056950
220	0.000000875629206	0.000000846127470	0.000000847101196

من خلال الجدول (1) والشكل (5) نلاحظ الحلول العددية لكلا الطريقتين والحل التحليلي للمسألة حيث يتضح لنا السلوك الفيزيائي لمعادلة KdV-B. وكذلك يوضح كل من الشكلين (6) و (7) الحل العددي للمعادلة بطريقة Crank-Nicholson وبقيم مختلفة لـ  $e$ .



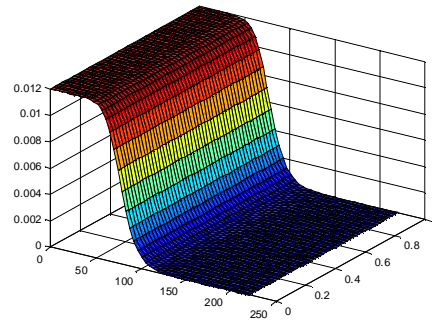
الشكل (5)

مقارنة بين الطريقتين مع الحل التحليلي عند الزمن  $t=0.3$



الشكل (7)

الحل العددي بطريقة Crank –Nicholson  
عندما  $e = 0.01, v = 0.001, m = 2$



الشكل (6)

الحل العددي بطريقة Crank –Nicholson  
عندما  $e = 0.1, v = 0.01, m = 1$

## 6. الاستنتاجات :

نستنتج من هذا البحث أن معادلة KdV-B تحوي في حدودها على المشتقة الثالثة وعند تطبيق طرائق الفروقات المنتهية لإيجاد الحل لها يظهر لنا قيم خارج منطقة الحل ولا يمكن التعويض عنها بقيم داخل منطقة الحل عليه تم استحداث أسلوب جديد طبق على طرائق الفروقات المنتهية المستخدمة.

ومن خلال المقارنة بين الطريقة الصريحة وطريقة Crank –Nicholson توصلنا إلى أن الطريقة الصريحة هي الأسهل بينما طريقة Crank-Nicholson أكثر دقة وأسرع تقارب من الطريقة الصريحة إلى الحل الحقيقي. وتم تحليل الأستقرارية لكلا الطريقتين باستخدام طريقة (Von-Neumann) Fourier وتبين أن طريقة Crank–Nicholson مستقرة على نحو غير مشروط في حين كانت الطريقة الصريحة مستقرة إذا كان  $k \leq (vh^2 / 2(v^2 + \frac{m^2}{h^2}))$  أي أنها مستقرة على نحو مشروط.



المصادر

- [1] Andras Balogh and Miroslav Krstic (2000), Boundary Control of the Korteweg-de Vries-Burgers Equation: Further Results on Stabilization and Well-Posedness, with Numerical Demonstration, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.45, No. 9, pp. 1739-1745.
- [2] Dambaru Bhatta (2008), Use of Modified Bernstein Polynomials to Solve KdV-Burgers Equation Numerically, Applied Mathematics and Computation, 206, 457-464.
- [3] Dogan Kaya (2004), An Application of the Decomposition Method for the KdVB Equation, Applied Mathematics and Computation, 152, 279-288.
- [4] John H. Mathews and Kurtis D. Fink (2004), *Numerical Methods Using Matlab*, Fourth Edition, Pearson Education International.
- [5] Leon Lapidus and George F.P. (1982), *Numerical Solution of partial Differential Equation in Science and Engineering* , John Wiley and Sons, Inc.
- [6] M.A. Helal and M.S.Mehanna (2006), A Comparison Between Two Different Methods for Solving KdV-Burgers Equation, Chaos, Solitons and Fractals, 28, 320-326.
- [7] Fred S. Roberts, (1984) , *Applied Combinatorics* , Rutgers University, prentice-Hall ,Inc. Englewood cliffs, New Jersey 07932, pp.:56
- [8] Talaat S. Aly El-Danaf (2002) ,Numerical Solution of the Korteweg-de Vries Burgers equation by using Quintic Spline method, STUDIA UNIV. “BABES<sub>3</sub>–BOLYAI”, Mathematica , Vol. XLVII, No.2, pp:41-54
- [9] Thakumar ,M.S.(1989) ,*Computer Based Numerical Analysis* ,Khanna Publishers.
- [10] Wei-Jiu Liu and Miroslav Krstic (1999), Controlling Nonlinear Water Waves: Boundary Stabilization of the Korteweg-de Vries-Burgers Equation, Proceeding of the American Control Conference, pp. 1637-1641.