النمذجة الماركوفية للموسيقى الرقمية مع التطبيق

Markovian Modeling of Digital Music with Application

أ.د. باسل يونس ذنون الخياط
كلية علوم الحاسبات والرياضيات
جامعة الموصل

م.م. زينة فالح صالح العجوز
كلية علوم الحاسبات والرياضيات
جامعة الموصل

م.م. محاسن ثابت يونس الطائي
كلية علوم الحاسبات والرياضيات
جامعة الموصل

Abstract

This research deals with building a stochastic model for the sequence of music notation by considering it as a Markov chain, after explaing some theoretical sides related to music science as well as the basics of Markov chain. Specially that related to the concept of order, An application on the a well known Islamic song is considered. The parameters of the Markovian model are estimated as well as the order.

الملخص

يتضمن هذا البحث بناء نموذج رياضي تصادفي لمتتابعة النوتات الموسيقية وذلك بإعتبارها سلسلة ماركوفية .فبعد إيضاح الجوانب النظرية المتعلقة بعلم الموسيقى ، إضافة إلى أساسيات السلاسل الماركوفية ، خاصة فيما يتعلق بمفهوم الرتبة ، يتم تطبيق الجوانب النظرية على النشيد الاسلامي "طلع البدر علينا من ثنيات الوداع" . ويتم تقدير معلمات النموذج الماركوفي المتعلق بهذا النشيد ، إضافة إلى تقدير رتبة النوتات الموسيقية المتعلقة به.

1 - المقدمة

يعد النموذج الماركوفي Markovian Model من النماذج الرياضية التصادفية التي تدخل تطبيقاته في شتى المجالات المختلفة(انظر على سبيل المثال الخياط 2010).لقد زادت اهمية هذا النموذج في الأونة الاخيرة كونه يعتمد على مفهوم الحالة الذي يُمكن من نمذجة المتتابعات الزمانية Temporal Sequences.ان الفكرة الأساسية للنموذج الماركوفي هي كالأتي:هناك فضاء حالة S يضم مجموعة(محدودة أو غير محدودة قابلة للعد)من الحالات،وان احتمالية حدوث أي من هذه الحالات معطى جميع الحالات السابقة يعتمد فقط على k من الحالات السابقة،اذا أن k تسمى رتبة Order النموذج.لقد درست الباحثة ابتهاج الكسو(2005) بعض الجوانب الإحصائية المتعلقة بإختيار الرتبة المناسبة لأي مشاهدات ممثلة بالنموذج الماركوفي. وفي هذا البحث نتعامل مع النمذجة الماركوفية بمفهومها العام للنوتات الموسيقية.

2- علم الموسيقى

يعد علم الموسيقى من العلوم التي تطورت علـى مـدى قـرون عديـدة وكلمـة موسـيقى "Music"تعني العديد من المعاني المختلفة فهي تترجم إلى "أُغنية" أو "فكرة أًغنيـة" ، وتتـألف الموسيقى من سبعة اصوات اساسية ، أي لايوجد بالموسيقى سوى سبعة أسـماء تـدل علـى النوتات والجدول ادناه يبين النوتات الموسيقية مع رموزها الحرفية ،وهي تقـرأ وتـدون مـن اليسار إلى اليمين حسب وضعها الافرنجي وقد جرى العمل على ذلك حتى في الـبلاد التـي تكتب حروف لغتها من اليمين إلى اليسار وعلى ذلك يجب أن تقرأ الموسيقى دائماً من اليـسار إلى اليمين[3] [6] .

النوتة باللغة العربية	النوتة باللغة الفرنسية	رمزها الحرفي
دو	do	C
ري	re	D
مي	me	E
فا	fa	F
صول	sol	G
لا	la	A
سي	si	B

الجدول (1):يوضح النوتات الموسيقية ورموزها الحرفية

يعتمد علم الموسيقى أساساً على النوتات الموسيقية إذا إن النوتات الموسيقية توضح زمن ايقاع النغم واسمه فهي توضح زمن ايقاع الانغام عن طريق اشكالها المختلفة كما توضـح اسـماء الانغام المختلفة حسب مركزها على السلم الموسيقي[3] .

والسلم الموسيقي هو عبارة عن خمسة اسطر متساوية في طولها ومسافات ابعادهـا ، بينهـا اربعة افرغة . يبتدأ في عد اسطره من الاسفل إلى الاعلى، وترتيب الافرغة في العـد مثـل ترتيب الاسطر، وتوضع الرموز المستعملة في تدوين الموسيقى على هذا السلم الموسيقي[6]

3-نمذجة المقطع الموسيقي

تتضمن نمذجة المقطع الموسيقي ثلاث عمليات وهي :

1- التقطع : أي تفكيك كلمات النشيد إلى أجزاء ووضع تحت كل جزء ما يناسبه من النوتـات الموسيقية وامدها الزمني .

2- تقسيم المحور الزمني Time Axis إلى نقـاط متـساوية المـسافات Equally Space ، ولتكن $t_1, t_2,\dots, t_h$ ، بحيث ان $t_i - t_{i-1}=h$ وان h كمية ثابتة للقيم $i = 1, 2\dots,n$.

3- تكرار كل رمز بما يتناسب مع أمده . فعلى سبيل التمثيل اذا كــان امــد النوتــة هــو $\frac{3}{4}$، وللتخلص من الكسر نقوم بضربها بالعدد (4) ، وعليه يكــون تكــرار النوتــة 3 مــرات .

4-نقوم بترتيب النوتات الموسيقية ، حيث تقابل كل نوتة موسيقية رقما يمثلها.

ولإيــضاح هــذه العمليــات نأخــذ النــشيد الإســلامي "**طلـــع البـــدر علينـــا**" كمثـــال (انظر الملحق)والجدول(2) يوضح كيفية تقطيع هذا النشيد.

التقطيع	ط	لـــ	ع	البـــ	درُ	ع	لـــ	يـــ	نا	من	ثـــ
النوتة	C	D	E	F	D	F	E	D	C	C	D
الامد الزمني	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
التقطيع	نـــ	يا	ت	الو	داع	و	جـــ	ب	الشـــ	كرُ	ع
النوتة	E	F	D	F	E	C	D	E	F	F	D
الامد الزمني	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
التقطيع	لـــ	يـــ	نا	ما	دا	ع	للـــ	ه	دا	ع	
النوتة	F	E	D	C	C	D	E	D	B	D	
الامد الزمني	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	

الجدول(2) يوضح كيفية تقطيع النشيد "طلع البدر علينا"

وبالاستفادة من الجدول السابق فقد تم الحصول على المتتابعة الموضحة في أدناه ووفق ما ذكر سابقا ، اذ ضربت الكسور بالعدد 2 ثم تكرار الرمز حسب أمده الزمني . ان المتتابعة الزمانية للنشيد طلع البدر علينا هي كما مبينة في أدناه (تقرأ أفقيا من اليسار إلى اليمين ابتداء من الزاوية اليسرى العليا وانتهاء بالزاوية اليمنى السفلى) وكمايلي :

{C,D,E,E,F,F,D,F,E,D,C,C,C,C,D,E,F,D,D,F,E,E,E,E,C,D,E,E,,F,F,D, F,E,D,C,C,C,D,E,E,D,D,B,D,C,C,C,C}

لتحويل المتتابعة الزمانية للنشيد الى متتابعة عددية فقد تم ترميزها وعلى النحو الآتي:

$C\equiv0$, $D\equiv1$, $E\equiv2$, $F\equiv3$, $B\equiv4$

وعليه فان المتتابعة بعد الترميز حسب الجدول (2) تصبح بالشكل الآتي :

{0,1,2,2,3,3,1,3,2,1,0,0,0,0,1,2,3,1,1,3,2,2,2,2,0,1,2,2,3,3,1,3,2,1,0,0,0,1,2, 2,1,1,4,1,0,0,0,0}

بما أننا نتعامل مع سبعة نوتات موسيقية(C,D,E,F,G,A,B) والتـــي يمكـــن وضـــعها بـــأي ترتيب وليكن EFAACDC, EBAGCFF وهكذا. فإذا فرضنا بان هـــذه الحـــروف تمثـــل الحالات states، فان هذه الحالات بينها اعتمادية برتبة معينة، $k=1,2,3,\ldots$ ،فإننـــا نـــستطيع نمذجة هذه المتتابعات باعتبارها سلسلة ماركوفية وبالرتبة التي تناسبها وفق معيار معين.

إذا افترضنا أن n تمثل عدد المواقع التي تشغلها النوتات السبعة، فان عدد الطرق الكلية (التوافيق) لإملاء n من المواقع هو 7^n حيث أن ...,n=1,2,3 ،وكما هو واضح فانه كلما زادت n فان عدد التوافيق يزداد بشكل كبير. حيث ان كل توفيق من التوافيق يمثل مقطع موسيقي مختلف عن المقاطع الأخرى.

4-تقدير الرتبة Estimation of Order

تُعد عملية تقدير رتبة سلسلة ماركوف لتمثيل مشاهداتها من المسائل بالغة الأهمية في التطبيقات الواقعية، لما لها من علاقة بذاكرة السلسلة من خلال تحكمها ببعد النموذج، يقال للعملية التصادفية $\{X_t;t=0,1,2,\ldots\}$ بأنها سلسلة ماركوف ذات رتبة محدودة m، أو ذات ذاكرة حجمها k، حيث أن m عدد صحيح موجب اكبر من الصفر، إذا تحققت العلاقة الاحتمالية الاتية[1] :

$$\begin{aligned} P &= (X_{t+1}=j \mid X_t=i_o, X_{t-1}=i_1,\ldots,X_{t-m}=i_m) \\ &= P(X_{t+1}=j \mid X_t=i_o, X_{t-1}=i_1,\ldots,X_{t-m}=i_m) \qquad (1) \end{aligned}$$

حيث أن m>0 وان $\forall i\in S$، وان S يمثل فضاء الحالة لـ $\{X_t\}$ ، $S=\{0,1,2,..S\}$.

ويمكن تعريف الرتبة بأنها اقل عدد صحيح موجب ممكن لعدد الحالات السابقة المباشرة التي يعتمد عليها احتمال الحالة القادمة. فإذا ما اعتمد احتمال الحالة القادمة على m من الحالات السابقة مباشرةً، وكانت m اصغر عد صحيح موجب ممكن، عندئذ فان m ستمثل رتبة سلسلة ماركوف، بحيث تحقق العلاقة (1). وقد تكون سلسلة ماركوف ذات رتبة صفرية (لا تمتلك ذاكرة)، أي أنها عبارة عن سلسلة من المتغيرات العشوائية (أو الحالات) المستقلة عن بعضها البعض، من هنا نستنتج بأن الرتبة في المتتابعات الموسيقية يُعنى بها عدد النوتات السابقة التي تعتمد عليها النوتة الحالية.

لقد ظهرت معايير المعلومات التي تعالج مسالة تقدير رتبة سلسلة ماركوف. ومن هذه المعايير المستخدمة معيار شانون للمعلومات (Shannon Information Criterion)، ومعيار خطأ التنبؤ النهائي (Final Prediction Error) ويرمز له اختصاراً (FPE)،معيار معلومات اكاكي (Akaike's Information Criterion) ويرمز له اختصاراً (AIC)،معيار معلومات بيز (Bayesian Information Criterion) ويرمز له اختصاراً (BIC). وسوف نستخدم في بحثنا هذا معيار بيز للمعلومات (BIC) الذي اقترحه Schwarz (1978) لتقدير رتبة المتتابعة الموسيقية[4] [5]. أن ما يميز معيار BIC عن معيار AIC أن الأول يعطي مقدّر متسق Consistence Estimate للرتبة الحقيقية، على العكس من الثاني. كذلك فان معيار AIC يعطي غالبا مقدرا ذو رتبة أعلى من الرتبة الحقيقية.

5-معيار معلومات بيز : Bayesian Information Criterion

قدم الباحث Akaike's سنة 1970 بحثاً طور فيه معياراً، وهو معيار خطأ التنبؤ النهائي (Final Prediction Error) (FPE)، عرّف فيه المعيار على انه متوسط مربعات الخطأ ألتنبؤي، وهو مقياس لتراكم التنبؤ. وقدم بعد ذلك معياراً لبناء النماذج التصادفية العامة اعتُبِر امتداداً لمعيار (FPE) بمقدمة عن المعيار النظري للمعلومات (AIC) الذي عرفه بالاتي[4]:

AIC= -2(Maximum likelihood)+2(No. of estimated Parameters in the model) (2)

فهو مقياس لانحرافات النموذج عن البناء الحقيقي، والطريقة التي تعطي نماذج متعددة وتُقر النموذج الذي يقلل (AIC) تسمى بمقدر أدنى (AIC) والذي يرمز له اختصاراً (MAICE) (Minimum AIC Estimator).

لاحظ Akaike (1972) أن طريقة معيار (AIC) لتحديد الرتبة (الذاكرة) لسلسلة ماركوف الطاقمية (Ergodic MC) وبعدد محدود من الحالات بأنها امتدادٌ لمكونات طريقة نسبة الترجيح الأعظم (Maximum LRT) [5] :

ومن المعروف أن من سلبيات معيار معلومات اكاكي (AIC) في تقدير الرتبة انه مقدر غير متسق (Unconsistent Estimator) للرتبة الحقيقية، وهذا يؤدي غالباً إلى إعطائه رتبة اعلى من الرتبة الحقيقية. ويمكن تطوير معيار معلومات اكاكي (AIC) لتقدير رتبة سلسلة ماركوف إلى معيار معلومات بيز (Bayesian Information Criterion) ويرمز له اختصاراً (BIC).طور Akaike (1978,1979) معيار معلومات جديد لتحديد الرتبة سماه بمعيار معلومات بيز (BIC) المشتق من تحوير بيز لمعيار معلومات اكاكي (AIC)، الذي يأخذ الصيغة الاتية [1]:

$$BIC(k) = n\log\hat{s}_E^2 - (n-k)\log(1-\frac{k}{n}) + k\log n + k\log\{k^{-1}(\frac{\hat{s}_X^2}{\hat{s}_E^2}-1)\} \qquad (3)$$

حيث أن

$\hat{\sigma}_E^2$: مقدر الترجيح الأعظم لتباين الخطأ المعتمد على نموذج عدد معلماته n.

$\hat{\sigma}_X^2$: مقدر تباين مشاهدات العينة.

وبتقريب المقدار $\{-(n-k)\log[1-\frac{k}{n}]\} = k$ ، فان

$$BIC(k) = AIC(k) + k(\log n - 1) + k\log\{k^{-1}(\frac{\hat{s}_X^2}{\hat{s}_E^2}-1)\} \qquad (4)$$

إن الفرق الأساس بين معياري (BIC) و (AIC) لتقدير الرتبة هو الحد الثاني في المعادلة الاتية :

$$AIC(k) = n \log \hat{s}_E^2 + 2k \qquad (5)$$

حيث استبدل الحد 2k، بالحد (k+k log n)، الذي يؤثر في زيادة الأوزان المرتبطة بحد الجزاء (Penalty Term) والذي يأخذ بنظر الاعتبار عدد معلمات النموذج،أي أن إقلال (BIC) سيؤدي عموماً إلى نموذج برتبة منخفضة، اقل من تلك التي تم الحصول عليها من إقلال (AIC).

ويرى Shibata (1976) ، في مجال السلاسل الزمنية، انه عندما يكون النموذج الحقيقي هو AR(ko)، فان تقدير الرتبة $\hat{m}$ المشتقة من معيار (AIC) هو تقدير غير متسق لـ ko، يميل الى التقديرات فوق المعلمية (Over parameterization) لـ ko في حين أن تقدير الرتبة الذي تم الحصول عليه من معيار (BIC) ربما يعطي تقديرات حقيقية للرتبة تحت المعلمية (Under parameterization) وبعدد محدود (قليل) من المعلمات.

واقترح Schwarz (1978) صيغتين معياراً لتقدير الرتبة، بشكل مبسط، الصيغة الأولى تتمثل بالمعادلة (6) [1].

$$S(k) = n \log \hat{s}_E^2 + k \log n \qquad (6)$$

وهو مشابه لصيغة معيار (BIC) التي طورها اكاكي والتي لا تعتمد على logn. وفي الحقيقة، إذا ما استخدمت الصيغة التقريبية في المعادلة (4) فان معيار (BIC) سيأخذ الصيغة الاتية:

$$BIC(k) = S(k) + k[\log\{k^{-1}(\frac{\hat{s}_X^2}{\hat{s}_E^2} - 1)\} - 1] \qquad (7)$$

$$\mathbf{= S(k) + O(k)}$$

حيث يشير الحد O(k) إلى الحد المستقل عن n.

وتعد الصيغة الثانية التي اقترحها (Schwarz, 1978) من ابسط طرائق معيار (BIC)، والتي نفترض عند تطبيقها لتقدير رتبة سلسلة ماركوف ماياتي:

تقدر رتبة سلسلة ماركوف المتقطعة $\{X_t;\ t\geq 1\}$ وبعدد محدود من الحالات أو النتائج النهائية، ليكن c، بحيث أن $|c|<\infty$، لمشاهدات عينة حجمها (n)وهي $x_1,x_2,\ldots,x_n$، بالقيمة $k = \hat{m}$ التي تقلل مجموع سالب اللوغاريتم للترجيح الأعظم للرتبة ذات التسلسل k-th، وحد الجزاء (Penalty Term) $\frac{|c|^m(|c|-1)}{2}\log n$ ، ولكل $k\geq 1$ هناك الاحتمال الاتي الذي سيكون مناسباً للاحتمالات الانتقالية (Transition Probabilities) Q(.|.) [1]

$$P(X_1^n = x_1^n) = P(X_1^k = x_1^k)\prod_{i=k+1}^{n} Q(x_i \mid x_{i-k}^{i-1}) \qquad (8)$$

وان $n \ge k$ و $x_1^n \in C^n$ وان x_r^n يشير إلى السلسلة $x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ ولحدوث اية عملية تصادفية أو سلسلة ماركوف في المعادلة (8)، ولاية قيمة معطاة لـ $k \ge 1$، فانه يرمز للسلسلة بالرمز X_k، وبالرمز X_o للعمليات التي تمتلك التوزيع (iid) نفسه. وإن الرتبة للعملية $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k$ تمثل اصغر عدد صحيح وهو k_o بحيث أن لبعض القيم $\mathbf{l} \ge 1$ فان $(X_n ; n \ge \mathbf{l})$ تنتمي إلى X_{ko}. إن الصيغة الثانية لمعيار (BIC) لتقدير رتبة سلسلة ماركوف يعطي المقدر الاتي:

$$\hat{m}(BIC) = \hat{m}\ BIC(x_1^n) = \arg\ \min_k(-\log\ P_{ML(k)}(x_1^n) + \frac{|c|^k\ (|c|-1)}{2}\log n) \quad (9)$$

حيث أن: $P_{KL(k)}(x_1^n)$: تمثل الرتبة k للترجيح الأعظم، بمعنى أنها اكبر احتمال يعطى لـ x_1^n بوساطة العمليات في X_k. وبالنتيجة فان المقدر $(\hat{m})$ متسق consistent.

إن برهان الاتساق اصبح متاحاً لمختلف المواقع (الباحثين)، كما في العمليات التي تمتلك التوزيع (iid) نفسه، والتي لها توزيعات من العوائل الاسية Exponential Families، وعمليات الانحدار الذاتي وسلاسل ماركوف، الذي يتضمن افتراضات معينة منها أن تكون أعداد (فئات) النموذج المرشح محدودة، وهذا يعني في سلسلة ماركوف ان هناك حداً أعلى معلوماً وهو k^* في رتبة العملية، وان الاقلال يكون لـ $k \le k^*$ في المعادلة (9)[1] .

فلو اعتبرنا المتتابعة من الرتبة الاولى فان لكل نوتة عند الزمن n هناك سبعة نوتات ممكنة عند الزمن n+1 . وفي المقطوعة التي اعتمدنا عليها فهي تعتمد فقط على خمسة نوتات موسيقية وهي C,D,E,F,B .لو اخذنا المتتابعة المبينة في ادناه والتي تمثل نوتات النشيد الاسلامي "طلع البدر علينا" .

{C,D,E,E,F,F,D,F,E,D,C,C,C,C,D,E,F,D,D,F,E,E,E,E,C,D,E,E,,F,F,D, F,E,D,C,C,C,D,E,E,D,D,B,D,C,C,C,C}.

وبعد الترميز تصبح المتتابعة بالشكل التالي:

{0,1,2,2,3,3,1,3,2,1,0,0,0,0,1,2,3,1,1,3,2,2,2,2,0,1,2,2,3,3,1,3,2,1,0,0,0,1,2 ,2,1,1,4,1,0,0,0,0}.

وباعتبار ان هذه المتتابعة تمثل سلسلة ماركوفية من الرتبة الاولى أي ان لكل نوتة عند الزمن n هناك خمس نوتات عند الزمن n+1. وتكون مصفوفة التكرارات بالشكل التالي:

رمز النوتة	C	D	E	F	B	مجموع السطور
C	8	4				12
D	3	2	4	3	1	13
E	1	3	6	3		13
F		3	3	2		8
B		1				1
مجموع الأعمدة	12	13	13	13	8	47

المصفوفة الانتقالية للمتتابعة من الرتبة الاولى

$$ {}_0h_1 = 8\log(\frac{8}{12}.\frac{47}{12}) + 4\log(\frac{4}{12}.\frac{47}{13}) + 3\log(\frac{3}{13}.\frac{47}{12}) + 2\log(\frac{2}{13}.\frac{47}{13}) $$
$$ +4\log(\frac{4}{13}.\frac{47}{13}) + 3\log(\frac{3}{13}.\frac{47}{8}) + \log(\frac{1}{13}.\frac{47}{1}) + \log(\frac{1}{13}.\frac{47}{12}) + $$
$$ 3\log(\frac{3}{13}.\frac{47}{13}) + 6\log(\frac{6}{13}.\frac{47}{13}) + 3\log(\frac{3}{13}.\frac{47}{8}) + 3\log(\frac{3}{8}.\frac{47}{13}) + $$
$$ 3\log(\frac{3}{8}.\frac{47}{13}) + 2\log(\frac{2}{8}.\frac{47}{8}) + \log(\frac{47}{13}). $$
$$ {}_0h_1 = 6.8165. $$
$$ \therefore -2\log l_{0,1} = 6.8165 \times 2 $$
$$ = 13.633 $$

والجدول الاتي يوضح الاحتمالات الانتقالية لنشيد (طلع البدر علينا) على اعتبار المتتابعة من الرتبة الاولى.

النوتة ألاحقة / النوتة السابقة	C	D	E	F	B
C	%66	%33	%0	%0	%0
D	%23	%15	%30	%23	%7
E	%7	%23	%46	%23	%0
F	%0	%37	%37	%25	%0
B	%0	%100	%0	%0	%0

الجدول (1) الاحتمالات الانتقالية للمتتابعة من الرتبة الاولى

وباعتبار أن متتابعة هذه النوتات تمثل سلسلة ماركوف من الرتبة الاولى أي أن النوتة الحالية عند الزمن n تتأثر فقط بالنوتة التي تسبقها فقط (عند الزمن n-1) فان فضاء الحالة يكّون المجموعة { S={ C,D,E,F,B .في حين أن المصفوفة الانتقالية تكون بقسمة كل عنصر من عناصر مصفوفة التكرارات على مجموع صفه وكما يأتي:

$$\underset{-}{P} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{13} & \frac{2}{13} & \frac{4}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{3}{13} & \frac{6}{13} & \frac{3}{13} & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

ومن الجدول والمصفوفة يتضح بان النوتات BD, BB, BF, BE, BC, FB, FC ,EB, CB, CF, CE معدومة في حين أن النوتتين BD نادرتين أما النوتتين CC شائعتين في المتتابعة الموسيقية.

اما لو اعتبرنا ان متتابعة هذه النوتات تمثل سلسلة ماركوف من الرتبة الثانية أي ان النوتة الحالية عند الزمن n تتأثر فقط بالنوتتين التين تسبقها عند الزمن n-1 وعند الزمن n-2 . فان مصفوفة التكرارات تكون بالشكل التالي:

رمز النوتة	C	D	E	F	B	مجموع السطور
CC	5	2				7
CD			4			4
DC	3					3
DD				1	1	2
DE			3	1		4
DF			3			3
DB		1				1
EC		1				1
ED	2	1				3
EE	1	1	2	2		6
EF		1		2		3
FC				2		2
FD		1				1
FE		2	1			3
FF		2				2
BD	1					1
مجموع الأعمدة	12	12	13	8	1	46

$$\begin{aligned}
{}_1h_2 &= 5\log(\tfrac{5}{7}.\tfrac{45}{12}) + 2\log(\tfrac{2}{7}.\tfrac{46}{12}) + 4\log(\tfrac{46}{13}) + 3\log(\tfrac{46}{12}) + \\
&\log(\tfrac{1}{2}.\tfrac{46}{8}) + \log(\tfrac{1}{2}.\tfrac{46}{1}) + 3\log(\tfrac{3}{4}.\tfrac{46}{13}) + \log(\tfrac{1}{4}.\tfrac{46}{8}) + 3\log(\tfrac{46}{13}) + \\
&\log(\tfrac{46}{12}) + \log(\tfrac{46}{12}) + 2\log(\tfrac{2}{3}.\tfrac{46}{12}) + \log(\tfrac{1}{3}.\tfrac{46}{12}) + \log(\tfrac{1}{6}.\tfrac{46}{12}) + \log(\tfrac{1}{6}.\tfrac{46}{12}) + \\
&2\log(\tfrac{2}{3}.\tfrac{46}{13}) + 2\log(\tfrac{2}{6}.\tfrac{46}{8}) + \log(\tfrac{1}{3}.\tfrac{46}{12}) + 2\log(\tfrac{2}{3}.\tfrac{46}{8}) + 2\log(\tfrac{46}{8}) + \\
&\log(\tfrac{46}{12}) + 2\log(\tfrac{2}{3}.\tfrac{46}{12}) + \log(\tfrac{1}{3}.\tfrac{46}{13}) + 2\log(\tfrac{46}{12}) + \log(\tfrac{46}{12}).
\end{aligned}$$

$${}_1h_2 = 19.4602$$

$$\begin{aligned}
\therefore -2\log l_{1,2} &= 19.4602 \times 2 \\
&= 38.9218.
\end{aligned}$$

والجدول الاتي يوضح الاحتمالات الانتقالية على اعتبار المتتابعة من الرتبة الثانية.

النوتة اللاحقة / النوتة السابقة	C	D	E	F	B
CC	%71	%28			
CE			%100		
DC	%100				
DD				%50	%50
DE			%75	%25	
DF			%100		
DB		%100			
EC		%100			
ED	%66	%33			
EE	%16	%16	%33	%33	

الجدول (2) الاحتمالات الانتقالية للمتتابعة من الرتبة الثانية

في حين ان المصفوفة الانتقالية تكون بالشكل الاتي

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

من الجدول والمصفوفة يتضح بان النوتات الثلاثة CDE , CCE, BDC (وجميع النوتات التي تكون نسبة حدوثها 0%) لاتحدث إطلاقا.

في حين ان النوتات EEC, EED نادرة الحدوث اما النوتات الثلاثة CCC شائعة جـــدا فـــي المتتابعة. اما لو عتبرنا ان متتابعة هذه النقاط تمثل سلسلة ماركوف من الرتبـــة الثالثـــة أي ان النوتة الحالية(عند الزمن n)تتأثر فقط بثلاث نوتات تسبقها(عند الزمن n-1 وعند الزمن n-2).

الجدول الآتي يوضح مصفوفة التكرارات للمتتابعة من الرتبة الثالثة:

رمز النوتة	C	D	E	F	B	مجموع السطور
CCC	2	2				4
DCC	3					3
EDC	2					2
BDC	1					1
DBD	1					1
FED	2	1				3
EEE	1		1			2
EEC		1				1
EED		1				1
DEE		1		2		3
DFE		2	1			3
DEF		1				1
EFF		2				2
DDB		1				1
CCD			2			2
ECD			1			1
CDE			3	1		4
FEE			1			1
DDF			1			1
FDF			2			2
FDD				1		1
FFB				2		2
EEF				2		2
EDD					1	1
مجموع الاعمدة	12	12	12	8	1	45

$$
\begin{aligned}
{}_2h_3 &= 2\log(\tfrac{2}{4}.\tfrac{45}{12})+2\log(\tfrac{2}{4}.\tfrac{45}{12})+3\log(\tfrac{45}{12})+2\log(\tfrac{45}{12})+\\
&\log(\tfrac{45}{12})+\log(\tfrac{45}{12})+2\log(\tfrac{2}{3}.\tfrac{45}{12})+\log(\tfrac{1}{3}.\tfrac{45}{12})+\log(\tfrac{1}{2}.\tfrac{45}{12})+\\
&+\log(\tfrac{1}{2}.\tfrac{45}{12})+\log(\tfrac{45}{12})+\log(\tfrac{45}{12})+\log(\tfrac{1}{3}.\tfrac{45}{12})+2\log(\tfrac{2}{3}.\tfrac{45}{8})+\\
&+2\log(\tfrac{2}{3}.\tfrac{45}{12})+\log(\tfrac{1}{3}.\tfrac{45}{12})+\log(\tfrac{45}{12})+2\log(\tfrac{45}{12})+\log(\tfrac{45}{12})+\\
&+2\log(\tfrac{45}{12})+\log(\tfrac{45}{12})+3\log(\tfrac{3}{4}.\tfrac{45}{12})+\log(\tfrac{1}{4}.\tfrac{45}{8})+\log(\tfrac{45}{12})+\\
&\log(\tfrac{45}{12})+2\log(\tfrac{45}{12})+\log(\tfrac{45}{8})+2\log(\tfrac{45}{8})+2\log(\tfrac{45}{8})+\log(45).
\end{aligned}
$$

$$ {}_2h_3 = 23.5273 $$

$$
\begin{aligned}
\therefore -2\log\, l_{2,3} &= 23.5273\times 2\\
&= 47.0546.
\end{aligned}
$$

يبين الجدول التالي الاحتمالات الانتقالية بين النوتات للمتتابعة من الرتبة الثالثة

B	F	E	D	C	النوتة اللاحقة / النوتة السابقة
			%5		CCC
				%100	DCC
				%100	EDC
				%100	BDC
				%100	DBD
			%33	%66	FED
		%50		%50	EEE
			%100		EEC
			%100		EED
	%66		%33		DEE
		%33	%66		DFE
			%100		DEF
			%100		EFF
			%100		DDB
		%100			CCD
		%100			ECD
	%25	%75			CDE
		%100			FEE

		%100			**DDF**
		%100			**FDF**
	%100				**FDD**
	%100				**FFB**
	%100				**EEF**
%100					**EDD**

الجدول (3) الاحتمالات الانتقالية للمتتابعة من الرتبة الثالثة.

اما المصفوفة الانتقالية تكون كما يأتي:

$$\underset{-}{P}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مما سبق يتضح لنا بان الاحتمالية لجميع الرتب المفترضة تكون حسب الجدول التالي

${}_k h_L$	$Lilelihood Statistic$
${}_0 h_1$	13.633
${}_1 h_2$	38.2918
${}_2 h_3$	47.0546
${}_3 h_4$	26.6834
${}_4 h_5$	25.8024

للسهولة سوف نرمز BIC بالرمز R(k) فيكون لدينا

$$R(k) = {}_k h_L + (m + m\log(n)).$$

k	$R(k)$	
0	13.6330	
1	41.6543	
2	53.7796	
3^*	36.7708^*	$(Order of the Chain)$
4	39.2524	

وباختيار اقل قيمة لدالة R(k) تكون المتسلسلة من الرتبة الثالثة

مناقشة

يتناول هذا البحث مسألة النمذجة الرياضية للنوتات الموسيقية وذلك باستخدام النموذج الماركوفي.فقد تم تطبيق هذا النموذج على النشيد الإسلامي "طلع البدر علينا من ثنيات الوداع" فقد تم اعتبار لنوتات الموسيقية كحالات في النموذج الماركوفي وتم تقدير المصفوفة الانتقالية تبعاً لذلك. كذلك فقد اعتمد معيار بيز للمعلومات BIC لتقدير الرتبة المناسبة لهذا النشيد ووجد أنها الرتبة الثالثة أي أن النوتة الواحدة في هذا النشيد تعتمد على النوتات الثلاثة السابقة لها. ونود أن نشير إلى أننا قد استخدمنا أيضا معيار أكاكي AIC لتقدير الرتبة إلا أننا استبعدنا هذا المعيار لكونه يعطي رتبة أعلى من رتبة معيار BIC.

شكر وتقدير

نتقدم بجزيل الشكر والامتنان للأستاذ هاني عبد الله استاذ في كلية الفنون الجميلة في جامعة الموصل لمساعدتنا في عملية التقطيع الموسيقي للنشيد الإسلامي (طلع البدر علن من ثنيات الوداع).

مصادر

1- الكّسو، ابتهاج عبد الحميد (2005)،"استخدام الشبكات العصبية في تقدير رتب سلاسل ماركوف مع التطبيق على سلسلة جبل بطمة في محافظة الموصل" ،أطروحة دكتوراه ، كلية علوم الحاسبات والرياضيات ، جامعة الموصل ، العراق.

2- الخياط، باسل يونس ذنون(2010)، " النمذجة الماركوفية وتطبيقها باستخدام MATLAB" كتاب قيد الإنجاز.

3- دانها وزير، أدولف(1966)،" نظرية الموسيقى" ، مطبعة نهضة مصر، القاهرة ، ترجمة محمد رشاد بدران .

4-Gates,P.(1975), “An examination in to the determination of the order of a markov chain using Akaikes information criterion”, unpublished M.Sc. Dissertation.

5-Tong,H.(1975).Determination of the order of a Markov chain by using akaikes information criterion”,J.APPL.Prob.12,PP.488-497.

6-Schwartz,B.(2003),“Transforming XML into music notation, unpublished M.Sc. Thesis University of Virginia.

الملحق

نشيد طلع البدر علينا

طلع البدر علينا　　　　من ثنيات الوداع

وجب الشكر علينا　　　　ما دعا لله داع

أيها المبعوث فينا　　　　جئت بالأمر المطاع

جئت نوّرت المدينة　　　　مرحبا يا خير داع