حول الجبور الأولية المضروبة كلياً الخاصة

On Particular Totally Multiplicatively Prime Algebras

د. عامر عبد الإله محمد / أستاذ مساعد
قسم الرياضيات / كلية التربية
جامعة الموصل – العراق (الموصل)

دعاء فائز عبد الله / مدرس مساعد
قسم الرياضيات / كلية التربية
جامعة الموصل – العراق (الموصل)

الخلاصة

تبعاً لماثيووكابريرا – رودريكث وكابريرا – محمد عرّفنا الجبور الأولية المضروبة كليا الخاصة . باستخدام تلك الجبور تم تحسين النتيجة العائدة لـــ كابريرا – محمد التي تنص على انه إذا كان A جبرا حقيقياً أولياً مضروباً كلياً فان الانغلاق المركزي لـــ A يكون جبرا معقداً أولياً مضروباً كلياً .

وأيضاً حدّدنا علاقة الجبور الأولية المضروبة كليا الخاصة بالجبور التي سبقتها وبالأخص الجبور الأولية المضروبة كليا والجبور الأولية المميزة والجبور الأولية كلياً .

1. مقدمة وتمهيد :

أول من درس التقوية التحليلية للخصائص الجبرية هو ماثيو في أطروحته للـــدكتوراه له [6] . نقصد بالتقوية التحليلية للخصائص الجبرية مثلاً إذا كان A جبراً أولياً بمعنى أن أي مثاليتين لـــ A حاصل ضربهما يساوي صفراً فان احدهما يجـــب أن تكـــون صـــفراً . هـــذه الخاصية الأولية للجبر تم تمثيلها بدلالة المؤثر الخطي $M_{a,b}$ وكما يلي :

$$M_{a,b} : A \to A$$
$$x \mapsto M_{a,b}(x) = axb$$

فان A (تجميعي) يكون أولياً إذا وفقط إذا كان $M_{a,b}=0$ يؤدي إلـــى $a=0$ أو $b=0$

حيث $(a,b\in A)$ أستطاع ماثيو أن يستخدم المؤثر الخطي $M_{a,b}$ للتقوية التحليلية لخاصـــية الأولي للجبر في حالة كون A جبراً معيارياً وكما يلي :

يقال للجبر التجميعي المعياري A بأنه جبر أولي مميز إذا وجد عدد ثابت موجب $K > 0$ بحيث

$$K\|a\|\|b\| \leq \|M_{a,b}\| \qquad a,b \in A$$

...(1)

من السهل معرفة كون A أولياً مباشرة من العلاقة (1) وكما أن العلاقة (1) تغنيننا عن استخدام القوة المميزة في تعريف الجبر الأولي المميز أنظر [7] . ظهور الجبور الأولية المميزة أثارت اهتمام الباحثين وأولهم ماثيو في دراسات متميزة لمعرفة جبور مهمة ذات تاريخ مثل جبر $- H^*$ ، جبر $- C^*$ ، $L_p(H)$ ، $C_0(H)$ ، $C_p(H)$ في كونها هل هي جبور أولية مميزة ؟ أستطاع ماثيو في [7] أن يثبت أن جبر $- C^*$ أولي يكون أولياً مميزاً بثابت $K = 1$.

نذكر بعض الدراسات حول الجبور الأولية المميزة مثل [2] ,[8], [9] السؤال الذي يتبادر إلى ذهن الباحثين هل أن الخاصية الأولية للجبور لا تعتمد على كون الجبر تجميعياً أو غير تجميعي؟ إلا انه لا يمكن استخدام المؤثر الخطي $M_{a,b}$ لإعطاء الخاصية الأولية للجبر في حالة كونه غير تجميعي لذلك لجأ الباحثون إلى إيجاد بديل للمؤثر $M_{a,b}$ والمؤثر البديل هو $N_{a,b}$ ومعرّف بالشكل الآتي :

$$N_{a,b} : M(A)\times M(A) \mapsto A$$
$$(F,G) \mapsto N_{a,b}(F,G) = F(a).G(b)$$

من السهولة معرفة أن الجبر A (ليس بالضرورة تجميعي) هو أولي إذا وفقط إذا كان $N_{a,b} = 0$ يؤدي إلى $a = 0$ أو $b = 0$. وأستطاع كل من كابريرا – رودريكث [4] من إعطاء التقوية التحليلية للخاصية الأولية للجبر غير التجميعي بدلالة المؤثر الخطي $N_{a,b}$ وكما يلي :

يقال للجبر المعياري A انه جبر أولي كلي(Totally prime algebra) إذا وجد عدد ثابت موجب $K > 0$ بحيث أن

$$K\|a\|\|b\| \le \|N_{a,b}\| \qquad \ldots(2)$$

ظهور الجبور الأولية كلياً أيضاً أثارت اهتمام الباحثين في دراسات متميزة نذكر منها [3] [4] [5] . استطاع كل من كابريرا – رودريكث في [4] أن يثبتا أن كل الجبور الأولية المميزة تكون أولية كلياً وكذلك أن كل الجبور الأولية كلياً التجميعية وغير التجميعية تكون مغلقة مركزياً . أيضاً استطاع كل من الباحثين كابريرا ومحمد في [1] أن يعرفا الجبور الأولية المضروبة التي ظهرت في دراستهما لعلاقة المركز الموسّع للجبر بالمركز الموسّع لجبر المضروبات له وكما يلي :

يقال للجبر A بأنه أولي مضروب (Multiplicatively prime) إذا كان كل من A و $M(A)$ جبوراً أولية .

وقد احتاج الباحثان إلى مؤثر خطي يكافئ الصفة الجبرية (الأولي المضروب) واستطاعا أن يعطيا الخاصية الاولي المضروب للجبر بدلالة المؤثر الخطي $W_{F,a}$ على غرار ما فعله كابريرا – رودريكث والمعرف بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned} W_{F,a} : M(A) &\rightarrow A \\ T &\mapsto W_{F,a}(T) = FT(a) \end{aligned}$$

استطاع كابريرا – محمد في ([1 ، قضية 1]) أن يثبتا أن A هو جبر أولي مضروب إذا وفقط إذا كان $W_{F,a} = 0$ يؤدي إلى $F = 0$ أو $a = 0$ (حيث $a \in A, F \in M(A)$) .

كذلك استخدما كابريرا – محمد في [2] المؤثر الخطي $W_{F,a}$ للتقوية التحليلية لخاصية الأولي المضروب للجبر في حالة كون A جبراً معيارياً وكما يلي :

يقال للجبر المعياري A انه جبر أولي مضروب كلي إذا وجد عدد ثابت موجب $K > 0$ بحيث أن :

$$K\|F\|\|a\| \le \|W_{F,b}\| \qquad \ldots(3)$$

لقد تم دراسة الجبور الأولية المضروبة كلياً بشكل تفصيلي في أطروحة الدكتوراه لـ محمد [2] .وكذلك البحوث المشتركة مع كابريرا نذكر منها [1]،[2]،[3].

في عملنا هذا استطعنا أن نقدم جبوراً معيارية وقد أطلقنا عليها اسم الجبور الأولية المضروبة كليا الخاصة وهي تعتبر جزء من الجبور الأولية المضروبة كلياً .

وكذلك تمكنا من تحديد علاقة الجبور الأولية المضروبة كليا الخاصة بالجبور الأولية المضروبة كليا (القضية 2-5) وكذلك علاقتها بالجبور الأولية المميزة (القضية 2-6).

وأخيراً علاقة تلك الجبور بالجبور الأولية الكلية (القضية 2-8) .

النتيجة الأساسية التي حصلنا عليها انه إذا كان A جبراً حقيقياً أولياً مضروباً كلياً خاصاً فان الانغلاق المركزي لـ A هو جبراً معقداً أولياً مضروباً كليا (المبرهنة 2-9) .

2. النتائج الأساسية Fundamental Results :

في هذه الفقرة سنقدم الجبور الأولية المضروبة كلياً الخاصة وعلاقتها بالجبور التي سبقتها ونبدأ بالمبرهنات والقضايا الآتية :

2-1 قضية

كل الجبور الأولية المضروبة كلياً هي جبور أولية كلياً .

البرهان :

(انظر [2 ، قضية 2.2]) .

2-2 مبرهنة

ليكن $(A,\|.\|)$ جبراً حقيقي أولياً مضروباً كلياً فان المركز الموسّع لــ A يساوي أما $\boldsymbol{R}$ أو $\boldsymbol{C}$. إذا كان $C(A)=\boldsymbol{C}$ فانه يوجد معيار جبري معقد $|.|$ علـــى الانغـــلاق المركـــزي $Q(A)$ لــ A بحيث أن $(Q(A)\ ,\ |.|)$ هو جبـــر أولـــي مـــضروب كلـــي والاحتـــواءات $(A,\|.\|)$ في $(Q(A)\ ,\ |.|)$ و $(M(A),\|.\|)$ في $(M(Q(A))\ ,\ |.|)$ تكون تبولوجية .

البرهان :

(انظر [2 ، مبرهنة 3.2]) .

2-3 قضية [2]

ليكن A جبراً معقداً معيارياً و B جبراً حقيقياً معيارياً مأخوذاً من A بواســطة قيــد الأعداد عندئذ A جبر أولي مضروب كلي إذا وفقط إذا كان B جبراً أولياً مضروباً كلياً .

2-4 تعريف الجبور الأولية المضروبة كلياً الخاصة

ليكن $(A,\|.\|)$ جبراً معيارياً وليكن b جبراً جزئيـــاً مـــن $BL(A)$ يحـــوي جبـــر المضروبات $M(A)$ لــ A يقال بان A هو جبر أولي مضروب كلـــي خـــاص اختـــصاراً $(b-T.M.P)$ إذا وجد عدد ثابت موجب $K>0$ بحيث إن :

$$K\|F\|\|a\|\leq\|W_{F,a}\| \qquad \forall\ F\in b \quad ,\ a\in A$$

حيث إن

$\|F\|$ $\quad$ $(The\ operator\ norm\ of\ F)$

و

$\|W_{F,a}\|$ $\quad$ $(The\ operator\ norm\ of\ W_{F,a})$

الآن ، بالإمكان تحديد علاقة الجبور الأولية المضروبة كليا الخاصة بـالجبور التـي سبقتها وكالاتي :

2-5 قضية مساعدة

كل الجبور الأولية المضروبة كلياً الخاصة هي جبور أولية مضروبة كلياً .

البرهان : مباشر .

2-6 قضية

ليكن A جبراً معيارياً ، عندئذٍ

إذا كان A جبراً أولياً مضروباً كلياً خاصاً فان b تكون أولياً مميزاً .

البرهان :

نفرض أن A هو جبر أولي مضروب كلي خاص، أي انـه يوجـد عـدد موجـب $K>0$ بحيث أن:

$$K\|F\|\|a\| \le \|W_{F,a}\| \qquad \forall \ F\in b \quad , a\in A$$

ليكن $a\in A$. لكل $F,G\in b$ و $T\in M(A)$ نحصل على

$$\begin{aligned}\|W_{F,G(a)}(T)\| &= \|FTG(a)\|\\ &\le \|FTG\|\|a\|\\ &= \|M_{F,G}(T)\|\|a\|\\ &\le \|M_{F,G}\|\|T\|\|a\|\end{aligned}$$

الآن ، بأخذ $\sup\limits_{\|T\|=1}$ للطرفين نحصل على

$$\|W_{F,G(a)}\| \le \|M_{F,G}\|\|a\|$$

بما أن A هو جبر أولي مضروب كلي خاص فان

$K\|F\|\|G(a)\| \le \|M_{F,G}\|\|a\|$

الآن ، بأخذ $\sup\limits_{\|a\|=1}$ للطرفين نحصل على

$$K\|F\|\|G\| \le \|M_{F,G}\| \qquad \forall\ F,G \in b$$

وعليه نستنتج أن b أولي مميز .

قبل البدء ببرهان المبرهنة(2-9) لا بد من ذكر بعض القضايا التي تمكننا من إظهار البرهان بشكل واضح وعليه نبدأ بالقضية الآتية :

2-7 قضية [2]

ليكن A جبر أولياً مضروباً كلياً خاصاً ، ونفرض أن K عدد موجب بحيث أن :

$$K\|F\|\|a\| \le \|W_{F,a}\| \qquad \forall\ F \in b \quad , a \in A$$

عندئذٍ

1. $K\|F\| \le \|F^U\| \le \|F\|$

لكل $F \in b$ و U مثالية غير صفرية لـــ A .

2. $K\|a\| \le \|E_a^{\wp}\| \le \|a\|$

لكل $a \in A$ و $\wp$ مثالية غير صفرية لـــ $M(A)$.

3. $K^2\|F\|\|a\| \le \|W_{F,a}^{\wp}\|$

لكل $F \in b$, $a \in A$ و $\wp$ مثالية غير صفرية لـــ $M(A)$.

الآن ، يمكننا تقديم النتيجة الأساسية لهذا البحث .

2-8 قضية

كل الجبور الأولية المضروبة كلياً الخاصة هي جبور أولية كلياً .

البرهان :

نفرض أن A هو جبر أولي مضروب كلي خاص ، حسب القضية المساعدة (2-5) نستنتج أن A هو جبر أولي مضروب كلي وحسب قضية (2-1) نستنتج أيضاً أن A هو جبر أولي كلي . وبهذا ينتهي البرهان ■

النتيجة الأساسية لهذا البحث تتلخص في المبرهنة الآتية:

2-9 مبرهنة

ليكن $(A,\|.\|)$ جبراً حقيقياً أولياً مضروباً كلياً خاصاً فان المركز الموسّع لـ A يساوي إما $\boldsymbol{R}$ أو $\boldsymbol{C}$. إذا كان $C(A)=\boldsymbol{C}$ فانه يوجد معيار جبري معقد $|.|$ على الانغلاق المركزي $Q(A)$ لـ A بحيث أن $(Q(A)\ ,\ |.|)$ هو جبر أولي مضروب كلي والاحتواءات $(A,\|.\|)$ في $(Q(A)\ ,\ |.|)$ و $(M(A),\|.\|)$ في $(M(Q(A))\ ,\ |.|)$ تكون تبولوجية .

البرهان :

حسب القضية المساعدة (2-5) نستنتج أن A هو جبر أولي مضروب كلي . وبتطبيق المبرهنة (2-2) نحصل على $(Q(A)\ ,\ |.|)$ يكون جبرا أولياً مضروبا كليا . وان الاحتواءات $(A,\|.\|)$ في $(Q(A)\ ,\ |.|)$ و $(M(A),\|.\|)$ في $(M(Q(A))\ ,\ |.|)$ تكون تبولوجية .

2-10 قضية

ليكن A جبراً معقداً معيارياً و B جبراً حقيقياً معيارياً مأخوذاً من A بواسطة قيد الأعداد عندئذ A هو جبر أولي مضروب كلي خاص إذا وفقط إذا كان B جبراً أولياً مضروباً كلياً خاصاً .

البرهان :

مباشر بتطبيق القضية المساعدة (2-5) . وقضية (2-3) نحـــصل علـــى المطلـــوب .

وبهذا ينتهي البرهان ■

المصادر

[1] Cabrera, M., Mohammed, A.A. "*Extended centroid and central closure of The multiplication algebra*", comm. Algebra 27 (12) (1999), 5723-5736.

[2] Cabrera, M., Mohammed, A.A. "*Totally multiplicatively prime algebras*", proc. Royal Soc. Edinburgh 132 A (2002), 1145-1162.

[3] Cabrera, M., Mohammed, A.A. "*Algebras of quotients with bounded evaluation of a normed prime algebra*", J. Oper. Theory, Romania, (2003).

[4] Cabrera, M., Rodriguez, A. "*Nonassociative ultraprime normed algebras*", Quart. J. Math. Oxford (2) 43 (1992), 1-7.

[5] Cabrera, M., Rodriguez, A. "*Non-degenerately ultraprime Jordan-Banach algebras : A Zel'manovian treatment*", Proc. London Math. Soc. 69 (1994), 567-604.

[6] Mathieu, M. ***"Applications of ultraprime Banach algebras in The Theory of elementary operators",*** Phd. Tubingen (1986).

[7] Mathieu, M. "*Rings of quotients of ultraprime Banach algebras with applications to elementary operators*", Proc. Centre Math. Anal. Austral Nat. Univ. 21 (1989), 297-317.

[8] Mathieu, M. "*The symmetric algebra of quotients of an ultraprime Banach algebras*", J. Austral. Math. Soc. (Series A) 50 (1991), 75-87.

[9] Murphy,G.J. ***"C*-algebras and operator Theory",*** Academic press, Inc., Boston, MA. (1990).