مقدّرات جديدة للنسبة في المعاينة العشوائية البسيطة باستخدام العامل (K)

خيري بدل رشيد — مدرس مساعد
سيف الدين ضياء الدين سعيد — مدرس مساعد
كلية علوم الحاسبات والرياضيات / قسم الإحصاء والمعلوماتية

الملخص :

في هذا البحث قمنا بإيجاد مقدّرات بديلة لمقدّرات النسبة التي اقترحها [Sisodia and Dwivedi] ، [Singh and Kakran] و[Upadhyaya and Singh] ، في المعاينة العشوائية البسيطة وذلك باستخدام العامل (K) ، إذ تم إيجاد معادلة متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقدّرات الجديدة وإيجاد القيمة النظرية للعامل (K) التي تجعل هذه المقدّرات أكثر دقة من المقدرات التقليدية التي اقترحها الباحثون أعلاه .

الكلمات الدالة : المعاينة العشوائية البسيطة ، مقدّر النسبة ، العامل (K) ، متوسط مربعات الخطأ .

New Ratio Estimators in Simple Random Sampling Using (K) Factor

Khairy B. Rasheed **Saifuddin D. Sa'eed**

Abstract :

In this research we find alternative ratio estimators to the suggested estimators for [Sesodia and Dwivedi] , [Singh and Kakran] and [Upadhyaya and Singh] , in simple random sampling by using (K) factor. We obtain mean square error (MSE) equation for all proposed estimators and find the theoretical conditions for (K) factor , which makes our proposed estimator more precise than the traditional and suggested estimators .

Keywords: **Simple Random Sampling ; Ratio Estimator ; (K) Factor ; Mean Square Errors**

1- المقدمة :

أن تحديد طريقة التعامل مع البيانات والاستفادة من المعلومات المتوافرة حولها وتوظيفها بما يؤدي إلى التصميم المناسب والقابل للتطبيق هو احد مصادر الحصول على المقدّرات الجيدة والدقيقة .

قد تظهر في بعض المسوحات معلومات مساعدة أو إضافية لمتغير له علاقة بالمتغير الذي نحن بصدد دراسته . هذه المعلومات يمكن الاستفادة منها لتحسين تصميم العينة ومن ثم الحصول على مقدّرات أكثر دقة لمعلمات مجتمع متغير الدراسة . يعد التقدير بالنسبة احد أهم أساليب التقدير في هكذا دراسات ، ولأهمية هذا النوع من التقدير فقد دفع الكثير من الباحثين إلى إيجاد صيغ مختلفة له تحقيقاً لأعلى دقة ممكنة .

تناول هذا البحث جانبين ، الأول : طرح فيه ما تم التوصل إليه من صيغ جديدة لتقدير النسبة من قبل مجموعة من الباحثين فضلاً عن طرح صيغ أخرى بديلة عن الصيغ التي طرحها هؤلاء الباحثون والتي أثبتت دقتها وتم دعم ما توصلنا إليه من نتائج نظرية بأمثلة تطبيقية و تجريبية والتي وردت في الجانب الثاني من هذا البحث .

2- مقدّر النسبة : Ratio estimator

تعتمد بعض المقدّرات على مشاهدات لظاهرة واحدة لعينة مأخوذة من المجتمع قيد الدراسة ، إلا أنه في كثير من الدراسات قد تظهر معلومات مساعدة لها علاقة مع متغير الدراسة ، هذه المعلومات يمكن الاستفادة منها في تحسين مقدّرات معلمات المجتمع لمتغير الدراسة ، فمثلاً قد نحتاج تقدير الإنتاج من الشعير بمعلومية المساحة الكلية المزروعة ، أو قد نود تقدير الإنفاق على سلعة ما بمعلومية الدخل العام ..الخ.

فإذا كانت : $(Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_N)$ ، مشاهدات لظاهرةٍ ما في المجتمع قيد الدراسة وان $(X_1, X_2, X_3, ..., X_N)$ هي بيانات إضافية مساعدة مرتبطة ارتباطاً كبيراً بالظاهرة قيد الدراسة ، عندئذٍ تعرف نسبة (Y) إلى (X) في المجتمع بالعلاقة الآتية : **[علوان ، 1993]**

$$R = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{\sum_{i=1}^{N} X_i} \quad ....(1)$$

(N) : عدد مفردات المجتمع .

والقيمة التقديرية (النسبة المحسوبة من قياسات العينة) لهذه النسبة هي :

$$\hat{R} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(n) : عدد مفردات العينة .

يعد مقدّر النسبة من المقدّرات المتسقة ولكنه متحيز . وإذا كنا بصدد دراسة مقدّر الوسط الحسابي لمتغير الدراسة باستخدام النسبة فيمكن الحصول عليه من خلال العلاقة الآتية :

$$\hat{\bar{Y}}_R = \hat{R}\bar{X} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\,\bar{X} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

وان متوسط مربعات الخطأ (MSE) لهذا المقدّر هو:

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_R) \cong E[\hat{\bar{Y}}_R - \bar{Y}]^2 = \frac{(1-f)}{n}\left[\sigma^2_{(y)} - 2R\sigma_{(xy)} + R^2\sigma^2_{(x)}\right] \ldots\ldots\ldots.(4)$$

حيث أن :

$f = \dfrac{n}{N}$: يمثل كسر المعاينة .

$(\sigma^2_{(x)}\,,\,\sigma^2_{(y)})$: تباين متغير الدراسة والمتغير المساعد على التوالي .

$(\sigma_{(x,y)})$: التباين المشترك بين المتغيرين .

3- <u>المقدّرات الجديدة للنسبة</u> : New Ratio estimators

[Kim , Sugur and Heu , (2007)] [Kadilar and Cingi ;2003]

في هذه الفقرة سندرج المقدّرات التي طرحها مجموعة من الباحثين في هذا المجال وكالاتي :

- اقترح **[Sesodia and Dwivedi , (1981)]** مقدّراً جديداً لمتوسط النسبة باستخدام العلاقة الآتية :

$$\hat{\bar{Y}}_{R(SD)} = \bar{y}\,\frac{\bar{X} + C_{(x)}}{\bar{x} + C_{(x)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

وبمتوسط مربعات خطأ قدره :

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{R(SD)}) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C^2_{(y)} + C^2_{(x)}\alpha(\alpha - 2Z)\right] \ldots\ldots\ldots.(6)$$

حيث أن :

$$\alpha = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + C_{(x)}}\,, \quad Z = \rho\,\frac{C_{(y)}}{C_{(x)}}$$

$C_{(x)}$, $C_{(y)}$: معامل الاختلاف لكل من متغير الدراســـة والمتغير المساعد في المجتمع.

ρ : معامل الارتباط بين المتغيرين (Y) و (X).

- اعتماداً على ما قدمـــه **[Sesodia and Dwivedi , (1981)]** اقتــرح Singh and Kakran تحسيناً للمقدّر السابق وذلك باستبدال معامل الاختلاف للمتغير المساعد فـــي المعادلـــة (5) بمعامل التفلطح لتصبح المعادلة بالصيغة الآتية :

$$\hat{\bar{Y}}_{R(SK)} = \bar{y}\,\frac{\bar{X}+\beta_{2(x)}}{\bar{x}+\beta_{2(x)}} \quad ....(7)$$

وبمتوسط مربعات خطأ قدره :

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{R(SK)}) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C^2_{(y)} + C^2_{(x)}\delta(\delta-2Z)\right] ....(8)$$

حيث أن :

$$\delta = \frac{\bar{X}}{\bar{X}+\beta_{2(x)}}$$

$\beta_{2(x)}$: معامل التفلطح للمتغير المساعد في المجتمع.

- اقترح **[Upadhyaya and Singh , (1999)]** مقدّرين آخرين لمتوسط النسبة وكالآتي :

$$\hat{\bar{Y}}_{R(US1)} = \bar{y}\,\frac{\bar{X}\,\beta_{2(x)}+C_{(x)}}{\bar{x}\,\beta_{2(x)}+C_{(x)}} \quad ....(9)$$

$$\hat{\bar{Y}}_{R(US2)} = \bar{y}\,\frac{\bar{X}\,C_{(x)}+\beta_{2(x)}}{\bar{x}\,C_{(x)}+\beta_{2(x)}} \quad ....(10)$$

وبمتوسط مربعات خطأ على التوالي :

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{R(US1)}) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C^2_{(y)} + C^2_{(x)}\omega_1(\omega_1-2Z)\right] ....(11)$$

$$MSE(\hat{\bar{Y}}_{R(US2)}) \cong \frac{(1-f)}{n}\bar{Y}^2\left[C^2_{(y)} + C^2_{(x)}\omega_2(\omega_2-2Z)\right] ....(12)$$

حيث أن :

$$\omega_1 = \frac{\bar{X}\,C_{(x)}}{\bar{X}\,C_{(x)}+\beta_{2(x)}} \quad , \quad \omega_2 = \frac{\bar{X}\;\beta_{2(x)}}{\bar{X}\beta_{2(x)}+C_{(x)}}$$

- اقترح **[Prasad , (1989)]** أسلوباً آخر لتقدير متوسط النسبة عن طريق العلاقة الآتية :

$$\hat{\bar{Y}}_{R(P)} = K\,\hat{\bar{Y}}_R \quad ....(13)$$

وبمتوسط مربعات خطا قدره :

$$MSE(\hat{\hat{Y}}_{R(P)}) \cong K^2 \frac{(1-f)}{n}\left[\sigma^2_{(y)} - 2R\sigma_{(xy)} + R^2\sigma^2_{(x)}\right] \text{.........}(14)$$

حيث أن العامل (K) يتم اختياره بحيث يقلل من متوسط مربعات الخطأ ويـــأخذ الصيغة الاتية:

$$K = \frac{1+\gamma\,\rho\, C_{(x)}\, C_{(y)}}{\gamma\, C^2_{(y)} + 1}$$

حيث أن :

$$\gamma = \frac{1-f}{n}$$

3- <u>المقدّرات المقترحة</u>: The Suggested estimators

في هذه الفقرة سنطرح مقدّرات بديلة لكل من المقدّرات في المعـــادلات (5) ، (7) ، (9) و (10) . وذلك باستخدام العامل (K) وكالاتي :

$$\hat{\hat{Y}}^*_{R(SD)} = K_1(\bar{y}\,\frac{\bar{X}+C_{(x)}}{\bar{x}+C_{(x)}}) \text{ ....}(15)$$

$$\hat{\hat{Y}}^*_{R(SK)} = K_2\,(\bar{y}\,\frac{\bar{X}+\beta_{2(x)}}{\bar{x}+\beta_{2(x)}}) \text{ ....}(16)$$

$$\hat{\hat{Y}}^*_{R(US1)} = K_3\,(\bar{y}\,\frac{\bar{X}\,\beta_{2(x)}+C_{(x)}}{\bar{x}\,\beta_{2(x)}+C_{(x)}}) \text{ ....}(17)$$

$$\hat{\hat{Y}}^*_{R(US2)} = K_4\,(\bar{y}\,\frac{\bar{X}\,C_{(x)}+\beta_{2(x)}}{\bar{x}\,C_{(x)}+\beta_{2(x)}}) \text{ ....}(18)$$

أما بالنسبة إلى متوسط مربعات الخطأ للمقدّرات أعلاه فسنوضح عملية إيجاده للمقدّر المقتـــرح الأول وبالأسلوب نفسه يمكن إتباعه على بقية المقدّرات :

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{\hat{Y}}^*_{R(SD)}) &= E(\hat{\hat{Y}}^*_{R(SD)} - \bar{Y})^2 \\
&= E(K_1\,\hat{\hat{Y}}_{R(SD)} - \bar{Y})^2 \\
&= E(K_1^2\,\hat{\hat{Y}}^2_{R(SD)} - 2\,K_1\,\hat{\hat{Y}}_{R(SD)}\bar{Y} + \bar{Y}^2) \\
&= K_1^2\,E(\hat{\hat{Y}}^2_{R(SD)}) - 2\,K_1\,\bar{Y}\,E(\hat{\hat{Y}}_{R(SD)}) \;\; + \bar{Y}^2
\end{aligned}$$

وبإضافة وطرح $(K_1^2\,\bar{Y}^2)$ للطرف الأيمن ، وبما أن $[\ E(\hat{\hat{Y}}_{R(SD)}) = \bar{Y}\ ]$ ، نجد أن :

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{\hat{Y}}^*_{R(SD)}) &= K_1^2\,E(\hat{\hat{Y}}^2_{R(SD)}) - 2\,K_1\,\bar{Y}\,\bar{Y} + \bar{Y}^2 + K_1^2\,\bar{Y}^2 - K_1^2\,\bar{Y}^2 \\
&= K_1^2\,E(\hat{\hat{Y}}^2_{R(SD)}) - 2\,K_1\,\bar{Y}^2 + \bar{Y}^2 + K_1^2\,\bar{Y}^2 - K_1^2\,\{E(\hat{\hat{Y}}_{R(SD)})\}^2 \\
&= K_1^2[\,E(\hat{\hat{Y}}^2_{R(SD)}) - \{E(\hat{\hat{Y}}_{R(SD)})\}^2\,] + \bar{Y}^2\,(K_1 - 1)^2
\end{aligned}$$

$$=K_1^2 MSE(\hat{\bar{Y}}_{R(SD)}) + \bar{Y}^2 (K_1 - 1)^2$$

$$\therefore MSE(\hat{\bar{Y}}^*_{R(SD)}) \cong K_1^2[\gamma \bar{Y}^2 \{C^2_{(y)} + C^2_{(x)} \alpha(\alpha - 2Z)\}] + \bar{Y}^2 (K_1 - 1)^2 \quad ....(19)$$

ولإيجاد المعادلة الخاصة بالعامل (K_1) والتي تجعل متوسط مربعات الخطأ لمتوسط النسبة اقل ما يمكن ، نأخذ المشتقة الأولى لمتوسط مربعات الخطأ في المعادلة (19) بالنسبة إلى K_1 ومساواة المشتقة بالصفر وكما يأتي :

$$\frac{\partial MSE(\hat{\bar{Y}}^*_{R(SD)})}{\partial K_1} = 2K_1[\gamma \bar{Y}^2 \{C^2_{(y)} + C^2_{(x)} \alpha(\alpha - 2Z)\}] + 2\bar{Y}^2 (K_1 - 1) = 0$$

$$2K_1 \, MSE(\hat{\bar{Y}}_{R(SD)}) + 2\,\bar{Y}^2 K_1 - 2\,\bar{Y}^2 = 0$$

$$2K_1 \, [MSE(\hat{\bar{Y}}_{R(SD)}) + \bar{Y}^2] = 2\,\bar{Y}^2$$

$$\therefore K_1 = \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Y}^2 + MSE(\hat{\bar{Y}}_{R(SD)})} = \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Y}^2 + \gamma \bar{Y}^2 \{C^2_{(y)} + C^2_{(x)} \alpha(\alpha - 2Z)\}} \quad ....(20)$$

علماً أن : $(0 < K_1 < 1)$.

وبالطريقة نفسها نجد أن متوسط مربعات الخطأ وقيمة العامل لكل من المقدّرات الثلاثة البقية هي كالآتي :

$$MSE(\hat{\bar{Y}}^*_{R(SK)}) \cong K_2^2[\gamma \bar{Y}^2 \{C^2_{(y)} + C^2_{(x)} \delta(\delta - 2Z)\}] + \bar{Y}^2 (K_2 - 1)^2 \quad ....(21)$$

$$\text{and} \quad K_2 = \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Y}^2 + MSE(\hat{\bar{Y}}_{R(SK)})} = \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Y}^2 + \gamma \bar{Y}^2 \{C^2_{(y)} + C^2_{(x)} \delta(\delta - 2Z)\}} \quad ....(22)$$

$$MSE(\hat{\bar{Y}}^*_{R(US1)}) \cong K_3^2[\gamma \bar{Y}^2 \{C^2_{(y)} + C^2_{(x)} \omega_1(\omega_1 - 2Z)\}] + \bar{Y}^2 (K_3 - 1)^2 \quad ....(23)$$

$$\text{and} \quad K_3 = \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Y}^2 + MSE(\hat{\bar{Y}}_{R(US1)})} = \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Y}^2 + \gamma \bar{Y}^2 \{C^2_{(y)} + C^2_{(x)} \omega_1(\omega_1 - 2Z)\}} \quad ....(24)$$

$$MSE(\hat{\bar{Y}}^*_{R(US2)}) \cong K_4^2[\gamma \bar{Y}^2 \{C^2_{(y)} + C^2_{(x)} \omega_2(\omega_2 - 2Z)\}] + \bar{Y}^2 (K_4 - 1)^2 \quad ....(25)$$

$$\text{and} \quad K_4 = \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Y}^2 + MSE(\hat{\bar{Y}}_{R(US2)})} = \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Y}^2 + \gamma \bar{Y}^2 \{C^2_{(y)} + C^2_{(x)} \omega_2(\omega_2 - 2Z)\}} \quad ....(26)$$

4- دقة المقدّرات المقترحة : Precession of Suggested Estimators

بمقارنة متوسط مربعات الخطأ لكل من المقدّرات المقترحة والاعتيادية سنحصل على الشرط الآتي (سيتم اخذ المقدّر الأول مثالاً ويمكن تطبيق الأسلوب نفسه على بقية المقدّرات):

Let $\vartheta_1 = [\gamma \bar{Y}^2 \{C^2_{(y)} + C^2_{(x)} \alpha(\alpha - 2Z)\}]$

$$MSE(\hat{\bar{Y}}^*_{R(SD)}) < MSE(\hat{\bar{Y}}_{R(SD)})$$

$$MSE(\hat{\bar{Y}}^*_{R(SD)}) - MSE(\hat{\bar{Y}}_{R(SD)}) < 0$$

$$K_1^2 \; MSE(\hat{\bar{Y}}_{R(SD)}) + \bar{Y}^2 (K_1 - 1)^2 - MSE(\hat{\bar{Y}}_{R(SD)}) < 0$$

$$K_1^2 \; \vartheta_1 - \vartheta_1 + \bar{Y}^2 (K_1 - 1)^2 < 0$$

$$\vartheta_1 (K_1^2 - 1) + \bar{Y}^2 (K_1 - 1)^2 < 0$$

$$\vartheta_1 (K_1 - 1)(K_1 + 1) + \bar{Y}^2 (K_1 - 1)(K_1 - 1) < 0$$

$$(K_1 - 1)[\vartheta_1 (K_1 + 1) + \bar{Y}^2 (K_1 - 1)] < 0$$

بما أن $(K_1 - 1) < 0$ لان $(0 < K_1 < 1)$. إذاً :

$$\vartheta_1 (K_1 + 1) + \bar{Y}^2 (K_1 - 1) > 0$$

$$\vartheta_1 K_1 + \vartheta_1 + \bar{Y}^2 K_1 - \bar{Y}^2 > 0$$

$$\vartheta_1 K_1 + \bar{Y}^2 K_1 + \vartheta_1 - \bar{Y}^2 > 0$$

$$K_1 (\bar{Y}^2 + \vartheta_1) - (\bar{Y}^2 - \vartheta_1) > 0$$

$$\therefore \; K_1 > \frac{(\bar{Y}^2 - \vartheta_1)}{(\bar{Y}^2 + \vartheta_1)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(27)$$

وبالطريقة نفسها ولبقية المقدّرات نجد أن ناتج الشرط هو كالآتي :

$$K_2 > \frac{(\bar{Y}^2 - \vartheta_2)}{(\bar{Y}^2 + \vartheta_2)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

$$K_3 > \frac{(\bar{Y}^2 - \vartheta_3)}{(\bar{Y}^2 + \vartheta_3)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(29)$$

$$K_4 > \frac{(\bar{Y}^2 - \vartheta_4)}{(\bar{Y}^2 + \vartheta_4)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(30)$$

حيث أن :

$$\vartheta_2 = [\gamma \bar{Y}^2 \{C^2_{(y)} + C^2_{(x)} \delta(\delta - 2Z)\}]$$

$$\vartheta_3 = [\gamma \bar{Y}^2 \{C^2_{(y)} + C^2_{(x)} \omega_1 (\omega_1 - 2Z)\}]$$

$$\vartheta_4 = [\gamma \bar{Y}^2 \{C^2_{(y)} + C^2_{(x)} \omega_2 (\omega_2 - 2Z)\}]$$

وعند تحقق(الشروط) في المعادلات (27) ، (28) ، (29) ، (30)، فان المقدّرات المقترحة تكون أكثر دقة من مقدّرات [Sisodia and Dwivedi] ، [Singh and Kakran] و[Upadhyaya and Singh] ، وبما أن الشروط أعلاه هي دائماً متحققة ، فبذلك يمكننا القول أن المقدّرات المقترحة أكثر دقة من بقية المقدّرات .

5- الجانب التطبيقي :

في هذا الجانب من البحث تم تطبيق ما ورد في الجانب النظري على مثالين تطبيقيـــين وكالآتي :

المثال الأول:

في هذا المثال تمت دراسة كمية إنتاج التفاح بوصفها متغير الدراسة (y) وعدد أشجار التفـــاح (x) كمتغير مساعد في (106) قرية حيث كان حجم العينة (20) قرية ، والجـــداول (1) ، (2) و (3) تمثل المعلومات ونتائج تطبيق طرائق المقدّرات المختلفة و (MSE) لكل طريقة :
[Kadilar and Cingi ;2003]

الجدول(1) المعلومات الخاصة بالبيانات

$N = 106$	$\bar{Y} = 2212.59$	$\alpha = 0.9999$	$R = 0.0807$
$n = 20$	$\bar{X} = 27421.70$	$\delta = 0.9987$	$R_{SD} = 0.0807$
$\rho = 0.86$	$\sigma_{(y)} = 11551.53$	$Z = 2.1377$	$R_{SK} = 0.0806$
$C_{(x)} = 5.22$	$\sigma_{(x)} = 57460.61$	$\omega_1 = 0.9999$	$R_{US1} = 0.0023$
$C_{(y)} = 2.10$	$\beta_2(x) = 34.57$	$\omega_2 = 0.9994$	$R_{US2} = 0.0385$

الجدول (2) نتائج متوسطات مربعات الخطأ وقيم العامل K وناتج الشرط

طرائق التقدير	MSE		قيم العامل K_i	ناتج الشرط $\frac{(\bar{Y}^2 - \vartheta_i)}{(\bar{Y}^2 + \vartheta_i)}$
	المقدّرات الاعتيادية الجديدة	المقدّرات المقترحة		
Sisodia-dwivedi	2542917.924	1673595.408	0.65814	0.2223
Singh-Kakran	2545275.812	1674616.399	0.65793	0.2218
Upadhyaya-Singh1	2542769.734	1673531.219	0.65815	0.2223
Upadhyaya-Singh2	2543961.235	1674047.253	0.65805	0.2221

الجدول (3) نتائج متوسطات مربعات الخطأ وقيمة العامل K وناتج الشرط لمقدّر Prasad

طرائق التقدير	MSE	قيمة العامل (K)	ناتج الشرط $\frac{(\bar{Y}^2 - \vartheta)}{(\bar{Y}^2 + \vartheta)}$
Prasad	1675991.788	0.65765	0.2212
Traditional	2548454.516		

من ملاحظة الجدول (2) نجد أن الطرائق المقترحة قد أعطت نتائج أعلى دقة من الطرائق الاعتيادية الجديدة وذلك لامتلاكها اقل متوسط مربعات خطأ ، كما يمكن ملاحظة تحقق الشروط للمعادلات (27) ، (28) ، (29) ، (30) . فضلاً عن كون المقدرات المقترحة أفضل من مقدر (Prasad) والمقدر الاعتيادي أيضاً كما تبين في الجدول (3) .

المثال الثاني:

تضمن هذا المثال سحب عينة عشوائية حجمها (30) مفردة من مجتمع قوامه (204) مفردات ، والجداول (4) ، (5) و (6) تبين المعلومات والنتائج التي تم الحصول عليها على التوالي :

[Kadilar and Cingi ;2003]

الجدول(4) المعلومات الخاصة بالبيانات

$N = 204$	$\bar{Y} = 967$	$\alpha = 0.999935$	$R = 0.036572$
$n = 30$	$\bar{X} = 26441$	$\delta = 0.998962$	$R_{SD} = 0.03657$
$\rho = 0.71$	$\sigma_{(y)} = 2390$	$Z = 1.019593$	$R_{SK} = 0.036534$
$C_x = 1.72$	$\sigma_{(x)} = 45403$	$\omega_1 = 0.999998$	$R_{US1} = 0.001331$
$C_y = 2.47$	$\beta_2(x) = 27.47$	$\omega_2 = 0.999396$	$R_{US2} = 0.02125$

الجدول (5) نتائج متوسطات مربعات الخطأ وقيم العامل K وناتج الشرط

طرائق التقدير	MSE		قيم العامل K_i	ناتج الشرط $\frac{(\bar{Y}^2 - \vartheta_i)}{(\bar{Y}^2 + \vartheta_i)}$
	المقدّرات الاعتيادية الجديدة	المقدّرات المقترحة		
Sisodia-dwivedi	80464.232	74088.896	0.920768	0.830953
Singh-Kakran	80467.314	74091.510	0.920765	0.830946
Upadhyaya-Singh1	80464.038	74088.732	0.920768	0.830953
Upadhyaya-Singh2	80465.920	74090.328	0.920767	0.830949

الجدول (6) نتائج متوسطات مربعات الخطأ وقيمة العامل K وناتج الشرط لمقدّر Prasad

طرائق التقدير	MSE	قيمة العامل (K)	ناتج الشرط $\frac{(\bar{Y}^2 - \vartheta)}{(\bar{Y}^2 + \vartheta)}$
Prasad	74181.344	0.920669	0.830731
Traditional	80573.286		

من ملاحظة الجدولين (5) و (6) نجد أن الطرائق المقترحة ما زالت ذات نتائج أعلى دقة من الطرائق الأخرى وكذلك من مقدر (Prasad) والمقدر الاعتيادي وذلك لامتلاكها اقل متوسط مربعات خطأ ، كما يمكن ملاحظة تحقق الشروط للمعادلات (27) ، (28) ، (29) ، (30) .

6- الجانب التجريبي :

في هذا الجانب تم توليد بيانات عشوائية لحالتين مختلفتين باستخدام التوزيع الطبيعي (Normal Distribution) ، تمثلت الحالة الأولى بتوليد (1000) مفردة متمثلةً بالمتغير المساعد (X) وبالاعتماد على هذا المتغير تم إيجاد متغير الدراسة (Y) وفق علاقة ارتباط معينة . أخيراً سحبت عينة عشوائية قوامها (20) مفردة وأجريت الحسابات الخاصة بإيجاد المؤشرات والمقدّرات ، ونتائج التجربة هي كما في الجداول الآتية:

[Law and Kelton , (2000)]

التجربة الأولى :

الجدول(7) المعلومات الخاصة بالبيانات

$N = 1000$	$\bar{Y} = 398.974$	$\alpha = 0.9999958$	$R = 0.002085$
$n = 20$	$\bar{X} = 191378.4$	$\delta = 0.9999962$	$R_{SD} = 0.002085$
$\rho = 0.97$	$\sigma_{(y)} = 179.974$	$Z = 0.542035$	$R_{SK} = 0.002085$
$C_x = 0.80725$	$\sigma_{(x)} = 154490.3$	$\omega_1 = 0.999994$	$R_{US1} = 0.00284$
$C_y = 0.45109$	$\beta_2(x) = 0.734$	$\omega_2 = 0.999995$	$R_{US2} = 0.00258$

الجدول (8) نتائج متوسطات مربعات الخطأ وقيم العامل K وناتج الشرط

طرائق التقدير	MSE		قيم العامل K_i	ناتج الشرط $\frac{(\bar{Y}^2 - \vartheta_i)}{(\bar{Y}^2 + \vartheta_i)}$
	المقدّرات الاعتيادية الجديدة	المقدّرات المقترحة		
Sisodia-dwivedi	1159.796	1151.406	0.99277	0.9854302
Singh-Kakran	1159.797	1151.408	0.99277	0.9854302
Upadhyaya-Singh1	1159.789	1151.399	0.99277	0.9854303
Upadhyaya-Singh2	1159.793	1151.404	0.99277	0.9854302

الجدول (9) نتائج متوسطات مربعات الخطأ وقيمة العامل K وناتج الشرط لمقدّر Prasad

طرائق التقدير	MSE	قيمة العامل (K)	ناتج الشرط $\frac{(\bar{Y}^2 - \vartheta)}{(\bar{Y}^2 + \vartheta)}$
Prasad	1151.426	0.99277	0.9854299
Traditional	1159.815		

من ملاحظة الجدول (8) نجد أن الطرائق المقترحة قد أعطت نتائج أعلى دقة من الطرائق الأخرى وذلك لامتلاكها اقل متوسط مربعات خطأ ، كما يمكن ملاحظة تحقق الشروط للمعادلات (27) ، (28) ، (29) ، (30) . كما يبين الجدول (9) دقة المقدرات المقترحة مقارنة مع مقدّر (Prasad) والمقدّر الاعتيادي .

التجربة الثانية :

في هذه التجربة تم استخدام التوزيع المنتظم (Uniform Distribution) ، في توليد (5000) مفردة تمثل المتغير المساعد (X) ومن ثم حساب متغير الدراسة (Y) وفق علاقة معينة ومن ثم سحبت عينة عشوائية قوامها (500) مفردة والنتائج كما هي موضحة في الجداول (10) ، (11) و (12) :

الجدول(10) المعلومات الخاصة بالبيانات

$N = 5000$	$\bar{Y} = 3.40E+07$	$\alpha = 0.99989$	$R = 6761.369$
$n = 500$	$\bar{X} = 5028.567$	$\delta = 1.00023$	$R_{SD} = 6760.602$
$\rho = 0.97$	$\sigma_{(y)} = 3.00E+07$	$Z = 1.50003$	$R_{SK} = 6762.925$
$C_x = 0.570576$	$\sigma_{(x)} = 2869.18$	$\omega_1 = 1.000098$	$R_{US1} = -5844.453$
$C_y = 0.882353$	$\beta_2(x) = -1.157$	$\omega_2 = 1.000403$	$R_{US2} = 11854.856$

الجدول (11) نتائج متوسطات مربعات الخطأ وقيم العامل K وناتج الشرط

طرائق التقدير	MSE		قيم العامل K_i	ناتج الشرط $\frac{(\bar{Y}^2 - \vartheta_i)}{(\bar{Y}^2 + \vartheta_i)}$
	المقدّرات الاعتيادية	المقدّرات المقترحة		
Sisodia-dwivedi	2.65195E+11	2.65135E+11	0.99977	0.9995412
Singh-Kakran	2.64963E+11	2.64902E+11	0.99977	0.9995416
Upadhyaya-Singh1	2.65052E+11	2.64991E+11	0.99977	0.9995414
Upadhyaya-Singh2	2.64845E+11	2.64785E+11	0.99977	0.9995418

الجدول (12) نتائج متوسطات مربعات الخطأ وقيمة العامل K وناتج الشرط لمقدّر Prasad

طرائق التقدير	MSE	قيمة العامل (K)	ناتج الشرط $\frac{(\bar{Y}^2 - \vartheta)}{(\bar{Y}^2 + \vartheta)}$
Prasad	2.65058E+11	0.99977	0.9995413
Traditional	2.65118E+11		

من ملاحظة الجدول (8) نجد أن الطرائق المقترحة قد أعطت نتائج أعلى دقة مــن الطرائــق الأخرى وذلك لامتلاكها اقل متوسط مربعات خطأ ، كما يمكــن ملاحظــة تحقــق الــشروط للمعادلات (27) ، (28) ، (29) ، (30) .

7- الاستنتاجات :

1- من ملاحظة جميع النتائج في الأمثلة التطبيقية والتجريبية نجد أن الطرائق البديلـــة المقترحة قد أعطت نتائج ذات دقة أعلى وبشكل واضح مقارنة بالطرائق الأخــرى .

2- تحقق ناتج الشرط في جميع الحالات مما يعطي دفعة قوية لان تكون وبالتأكـــيد المقدّرات البديلة المقترحة ذات دقة عالية .

8- المصـــادر :

1- علوان ، حسين (1993) ، " طرق المعاينة " ، الطبعة الأولى ، دار الفرقـــان للنشر والتوزيع ، جامعة اليرموك ، عمان - الاردن .

2- Kadilar , C. , and Cingi , H. , (2003) , "Ratio Estimators in Stratified Random Sampling ", Biometrical Journal , Vol. (45) , No . (2) , p.p.(218–225) .

3- Kim , J. , Sungur , E. , and Heo , T. , (2007) , " Calibration Approach Estimators in Stratified Sampling " , Statistics & Probability Letters , Vol. (77) , p.p. (99-103) .

4- Law , A. , and Kelton , W. , (2000) , " Simulation Modeling and Analysis " , 3rd. ed. , McGraw-Hill Companies , Inc. USA .

5- Prasad, B., (1989), " Some Improved Ratio Type Estimators of Population Mean and ratio in finite population sample surveys", Commun. Statist. Theor. Meth., Vol. (18), No.(1), p.p. (379–392) .

6- Sisodia, B. and Dwivedi, V., (1981), " A Modified Ratio Estimator Using Coefficient of Variation of Auxiliary Variable", Journal of Indian Society Agricultural Statistics ,Vol. (33), p.p.(13–18) .

7- Upadhyaya, L., and Singh, H., (1999), " Use of Transformed Auxiliary Variable in Estimating the Finite Population Mean" , Biometrical Journal ,Vol.(41),No. (5), p.p.(627–636) .